EA614 — Análise de Sinais

Pedro L. D. Peres

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

1º Semestre 2015: Aula 1 — Preliminares

Conhecimentos Necessários

Tópico principais

- Números complexos
- Representação de funções
- Integral e derivada
- Resolução de sistemas lineares de equações
- Matrizes e vetores

Notação e Informações Básicas

Número complexo

$$z = \rho \exp(j\theta), \quad \rho > 0, \qquad |z| = \rho, \quad \angle z = \theta$$

Teorema de Euler

$$\exp(j\theta) = \cos(\theta) + j\text{sen}(\theta) \quad , \quad \theta \in \mathbb{R}$$

de Moivre

$$\exp(j\theta)^n = \exp(jn\theta) = \cos(n\theta) + j\text{sen}(n\theta)$$

Notação e Informações Básicas

Degrau $u(t)$ e Gate $G_T(t)$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} , \qquad G_T(t) = u(t + T/2) - u(t - T/2)$$

Sinais $x(t)$ e $y(t)$ ortogonais

$$x(t) \perp y(t) \quad \Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) dt = 0$$

sendo $y^*(t)$ o complexo conjugado de $y(t)$.

a) Resolva o sistema linear de equações ($j = \sqrt{-1}$)

$$\begin{cases} (2-j)z_1 + 2z_2 = 7-j \\ -2jz_1 + (1+j)z_2 = 5-j \end{cases}$$

$$z_1 = 1+j \quad , \quad z_2 = 2-j$$

Números complexos

a) Resolva o sistema linear de equações ($j = \sqrt{-1}$)

$$\begin{cases} (2-j)z_1 + 2z_2 = 7-j \\ -2jz_1 + (1+j)z_2 = 5-j \end{cases}$$

$$z_1 = 1+j \quad , \quad z_2 = 2-j$$

Máximo do módulo

b) Determine o máximo valor do módulo da função de transferência abaixo, para $s = j\omega$, e a freqüência ω_r na qual o máximo ocorre

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

$$M(\omega_r) = 2/\sqrt{3} \quad , \quad \omega_r = 1/\sqrt{2}$$

Máximo do módulo

b) Determine o máximo valor do módulo da função de transferência abaixo, para $s = j\omega$, e a freqüência ω_r na qual o máximo ocorre

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

$$M(\omega_r) = 2/\sqrt{3} \quad , \quad \omega_r = 1/\sqrt{2}$$

Sinais ortogonais

c) Determine a e b que tornam $x_3(t)$ ortogonal a $x_1(t)$ e a $x_2(t)$, sendo

$$x_1(t) = G_1(t-0.5),\ x_2(t) = tG_1(t-0.5),\ x_3(t) = (at^2 + bt - \frac{1}{6})G_1(t-0.5)$$

$$a = -1 \quad , \quad b = 1$$

c) Determine a e b que tornam $x_3(t)$ ortogonal a $x_1(t)$ e a $x_2(t)$, sendo

$$x_1(t) = G_1(t-0.5),\; x_2(t) = tG_1(t-0.5),\; x_3(t) = (at^2 + bt - \frac{1}{6})G_1(t-0.5)$$

$$a = -1 \quad , \quad b = 1$$

Soma de exponenciais complexas

d) Mostre que o sinal

$$x[n] = 2\exp(n)\mathrm{sen}(2n + \pi/6)$$

pode ser expresso como uma soma de exponenciais complexas

$$x[n] = \exp\left(n + j(2n - \pi/3)\right) + \exp\left(n - j(2n - \pi/3)\right)$$

e) Mostre que o sinal

$$x[n] = 10j\exp\left((3+j)n\right) - 10j\exp\left((3-j)n\right)$$

pode ser expresso como

$$x[n] = \rho\exp(\alpha n)\cos(\omega n + \theta) \quad \rho > 0, \omega > 0$$

com ρ, α, ω e θ reais, dados por

$$x[n] = 20\exp(3n)\cos(n + \pi/2)$$

Módulo de número complexo

f) Considere o sistema descrito pela equação a diferenças

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]$$

com $x[n] = z^n$.

Mostre que o módulo de $y[n]$, para $z = \exp(j\omega)$, é dado por

$$|y[n]| = |j\exp(-j\omega/2)\text{sen}(\omega/2)| = |\text{sen}(\omega/2)|$$

Esboce $|y[n]|$ para ω entre $-\pi$ e $+\pi$.

Módulo de número complexo

$$y[n] = \frac{(1 - z^{-1})z^n}{2}, \quad z = \exp(j\omega) \quad \Rightarrow \quad y[n] = \frac{\big(1 - \exp(-j\omega)\big)\exp(j\omega n)}{2}$$

$$= j\exp(-j\omega/2)\left(\frac{\exp(j\omega/2) - \exp(-j\omega/2)}{2j}\right)\exp(j\omega n)$$

$$= j\exp(-j\omega/2)\mathrm{sen}(\omega/2)\exp(j\omega n)$$

$$|y[n]| = |\mathrm{sen}(\omega/2)|, \quad \angle y[n] = \frac{\pi}{2}\mathrm{sinal}(\omega) - \frac{\omega}{2}$$