

Livro (e-book): Linearidade em Sinais e Sistemas,
Ivanil S. Bonatti, Amauri Lopes, Pedro L. D. Peres,
Cristiano M. Agulhari,

Ed. Blucher, SP, 2015, 1ed., ISBN: 9788521208921.

Prof. Pedro L. D. Peres

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas



Solução da equação homogênea II

Note que trata-se de um sistema triangular, isto é, um sistema em cascata

$$\dot{v}_1 = v_2, \quad \dot{v}_2 = -v_2 \quad \Rightarrow \quad v_1(0) = 0, \quad v_2(0) = 1$$

cuja solução é dada por

$$v_2(t) = \exp(-t), \quad p v_1 = \exp(-t) \quad \Rightarrow \quad v_1(t) = -\exp(-t) + a = 1 - \exp(-t)$$



Laplace

Aplicando a transformada unilateral de Laplace à equação homogênea (1), tem-se (a transformada de uma matriz é a transformada de cada um dos seus elementos)

$$\dot{v} = Av \quad , \quad v(0) = v_0 \in \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{\dot{v}\} = s\mathcal{L}\{v\} - v_0 = A\mathcal{L}\{v\}$$

e, portanto,

$$V(s) = \mathcal{L}\{v\} = (sI - A)^{-1}v_0 \in \mathbb{C}^n \quad \Rightarrow \quad v(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\}$$



Exemplo II

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - \exp(-t) \\ 0 & \exp(-t) \end{bmatrix} u(t)$$

$$v(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} v_0 = \begin{bmatrix} 1 - \exp(-t) \\ \exp(-t) \end{bmatrix} u(t)$$

Cayley-Hamilton II

$$(\lambda I - A)(B_{n-1}\lambda^{n-1} + B_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + B_1\lambda + B_0) = \det(\lambda I - A)I$$

$$B_{n-1}\lambda^n + (B_{n-2} - AB_{n-1})\lambda^{n-1} + (B_{n-3} - AB_{n-2})\lambda^{n-2} + \dots + (B_0 - AB_1)\lambda - AB_0 = \det(\lambda I - A)I$$

Usando a equação característica do lado direito, tem-se

$$\begin{aligned} B_{n-1}\lambda^n + (B_{n-2} - AB_{n-1})\lambda^{n-1} + (B_{n-3} - AB_{n-2})\lambda^{n-2} + \dots + (B_0 - AB_1)\lambda - AB_0 &= \\ &= \lambda^n I + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1}I + \dots + \alpha_1\lambda I + \alpha_0 I \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes de mesma potência em λ

Cayley-Hamilton III

$$\begin{aligned}
 B_{n-1} &= I \\
 B_{n-2} - AB_{n-1} &= \alpha_{n-1}I \\
 B_{n-3} - AB_{n-2} &= \alpha_{n-2}I \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 B_0 - AB_1 &= \alpha_1I \\
 -AB_0 &= \alpha_0I
 \end{aligned}$$

Multiplicando a primeira equação por A^n , a segunda por A^{n-1} , e assim por diante, e somando, do lado direito tem-se $\Delta(A)$. Assim,

$$\begin{aligned}
 (A^n B_{n-1} - A^n B_{n-1}) &+ (A^{n-1} B_{n-2} - A^{n-1} B_{n-2}) + (A^{n-2} B_{n-3} - A^{n-2} B_{n-3}) + \dots \\
 &+ (A^2 B_1 - A^2 B_1) + (AB_0 - AB_0) = 0
 \end{aligned}$$

Como conclusão, $\Delta(A) = 0$.

Exemplo

Exemplo 1.4

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

cujo polinômio característico é dado por

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda(\lambda + 1)$$

Computando o polinômio (matricial)

$$\Delta(A) = A(A+I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

observa-se que a matriz A satisfaz sua equação característica.

Briot-Ruffini II

Note que $\exp(\lambda t)$ é polinomial, podendo ser obtida pela expansão em série de Taylor.

Além disso, para λ raiz da equação característica $\Delta(\lambda) = 0$, tem-se

$$\exp(\lambda t) = r(\lambda, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k(t) \lambda^k$$

As funções $\rho_k(t)$ podem ser obtidas pela resolução de um sistema linear de equações resultante da aplicação da equação (3) nas raízes distintas de $\Delta(\lambda) = 0$ e, no caso de raízes com multiplicidade maior do que 1, utilizando-se também as derivadas (em relação a λ) da equação.

Função de matriz quadrada

Propriedade 8 (Função de matriz quadrada)

Seja $f(\lambda)$ uma função polinomial e $\Delta(\lambda)$ um polinômio de grau n em λ . Então,

$$f(\lambda) = q(\lambda)\Delta(\lambda) + \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k \lambda^k$$

Para λ autovalor de A , $\Delta(\lambda) = 0$ e, pelo Teorema de Cayley-Hamilton,

$$\Delta(A) = 0 \Rightarrow f(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k A^k$$

Note que, para matrizes bloco-diagonais com submatrizes quadradas,

$$A = \text{diag}(A_1, \dots, A_\ell) \Rightarrow f(A) = \text{diag}(f(A_1), \dots, f(A_\ell))$$

Exemplo I

Exemplo 1.7

Considere novamente o sistema do Exemplo 1.1

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Usando a Propriedade 7 (Briot-Ruffini), tem-se

$$\exp(\lambda t) = \rho_0(t) + \rho_1(t)\lambda$$

para $\lambda = 0$ e $\lambda = -1$ (autovalores de A), resultando em

$$\exp(0t) = 1 = \rho_0(t) + \rho_1(t)0, \quad \exp(-t) = \rho_0(t) - \rho_1(t) \Rightarrow \rho_0(t) = 1, \quad \rho_1(t) = 1 - \exp(-t)$$

Do Teorema de Cayley-Hamilton e da Propriedade 9, obtém-se

$$\exp(At) = \rho_0(t)I + \rho_1(t)A =$$

Exemplo II

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (1 - \exp(-t)) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - \exp(-t) \\ 0 & \exp(-t) \end{bmatrix}$$

Impondo a condição inicial, tem-se

$$v(t) = \exp(At)v(0) = \begin{bmatrix} 1 - \exp(-t) \\ \exp(-t) \end{bmatrix}$$

Exemplo I

Exemplo 1.8

Considere novamente o sistema

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} , \quad \lambda_1 = -3 , \lambda_2 = 3 , \quad v(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Os coeficientes do polinômio $r(\lambda, t)$ são obtidos das condições

$$\exp(-3t) = \rho_0(t) - 3\rho_1(t) \quad , \quad \exp(3t) = \rho_0(t) + 3\rho_1(t)$$

resultando em

$$\rho_0(t) = \frac{1}{2}(\exp(3t) + \exp(-3t)) \quad , \quad \rho_1(t) = \frac{1}{6}(\exp(3t) - \exp(-3t))$$

Portanto,

$$v(t) = \exp(At)v(0) = (\rho_0(t)I + \rho_1(t)A)v(0)$$

Exemplo II

$$\begin{aligned}v(t) &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \exp(3t) + 2\exp(-3t) & 2\exp(3t) - 2\exp(-3t) \\ \exp(3t) - \exp(-3t) & 2\exp(3t) + \exp(-3t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \exp(3t) + 2\exp(-3t) \\ \exp(3t) - \exp(-3t) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Para uma discussão sobre aspectos numéricos do cálculo de $\exp(At)$, recomenda-se

- C. Moler and C. Van Loan. Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix. *SIAM Review*, 20(4):801–836, October 1978.
- C. Moler and C. Van Loan. Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later. *SIAM Review*, 45(1):3–49, March 2003.



Similaridade

Considere a equação de estado

$$\dot{v} = Av \quad , \quad v(0) = v_0 \in \mathbb{R}^n$$

Definindo a mudança de variáveis (T não singular)

$$v = T\hat{v} \quad \Rightarrow \quad T\dot{\hat{v}} = AT\hat{v} \quad \Rightarrow \quad \dot{\hat{v}} = \hat{A}\hat{v} \quad ; \quad \hat{A} = T^{-1}AT \quad , \quad A = T\hat{A}T^{-1}$$

Similaridade e autovalores

Propriedade 10 (Similaridade e autovalores)

Transformações de similaridade preservam os autovalores, pois

$$\det(\hat{A} - \lambda I) = \det(T^{-1}AT - \lambda T^{-1}T) = \det(A - \lambda I)$$

Escolhas apropriadas da transformação T podem levar a representações \hat{A} diagonal ou triangular, dependendo da estrutura de autovalores e autovetores da matriz A .

Propriedade 11 (Função de matriz similar)

$$A = T\hat{A}T^{-1} \Rightarrow f(A) = Tf(\hat{A})T^{-1}$$

pois, pelo Teorema de Cayley-Hamilton,

$$f(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k A^k = \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k \underbrace{(T\hat{A}T^{-1}) \cdots (T\hat{A}T^{-1})}_{k \text{ vezes}} = T \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k \hat{A}^k T^{-1} = Tf(\hat{A})T^{-1}$$

Exponencial de matriz diagonal

Propriedade 13 (Exponencial de matriz diagonal)

Para uma matriz $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (diagonal), tem-se

$$\exp(\Lambda t) = \text{diag}(\exp(\lambda_1 t), \dots, \exp(\lambda_n t))$$

pois

$$\dot{v} = \Lambda v \quad \Rightarrow \quad v_k(t) = \exp(\lambda_k t) v_k(0)$$

e

$$v(t) = \text{diag}(\exp(\lambda_1 t), \dots, \exp(\lambda_n t)) v(0)$$

Como a solução de $\dot{v} = \Lambda v$ é dada por

$$v(t) = \exp(\Lambda t) v(0)$$

tem-se

$$v(t) = \exp(\Lambda t) v(0) = \text{diag}(\exp(\lambda_1 t), \dots, \exp(\lambda_n t)) v(0) \quad , \quad \forall v(0)$$

Matrizes diagonalizáveis

Propriedade 14 (Matrizes diagonalizáveis)

Se uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ possui n autovetores linearmente independentes, a transformação Q construída com os autovetores (colunas) resulta em

$$AQ = Q\hat{A} \Rightarrow \hat{A} = Q^{-1}AQ = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

sendo $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ os autovalores de A , pois

$$A \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Note que os autovalores não precisam ser distintos.

Exemplo I

Exemplo 1.9 (Autovalores distintos)

Considere novamente a equação de estado homogênea do Exemplo 1.3

$$\dot{v} = Av = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Os autovalores da matriz A são obtidos da solução da equação característica

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -4 \\ -2 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 1) - 8 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 3$$

e os autovetores podem ser determinados pela equação

$$(A - (-3)I)q_1 = 0, \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow q_1 = \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(A - 3I)q_2 = 0, \quad \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{12} \\ q_{22} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow q_2 = \begin{bmatrix} q_{12} \\ q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo II

Observe que os autovetores definem uma direção no espaço (e não um comprimento nem um sentido) e são linearmente independentes.

A transformação de similaridade resulta em uma matriz diagonal

$$\hat{A} = Q^{-1}AQ = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

A matriz A é diagonalizável, com a transformação $v = Q\hat{v}$ dada por

$$\dot{\hat{v}} = \hat{A}\hat{v} \quad , \quad \hat{v}(0) = Q^{-1}v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

com

$$\hat{A} = Q^{-1}AQ = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Observe que a representação na variável \hat{v} é um sistema desacoplado com duas equações de primeira ordem. Resolvendo, tem-se

Exemplo III

$$\hat{v}(t) = \begin{bmatrix} \exp(-3t) \\ \exp(3t) \end{bmatrix} \Rightarrow v(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \hat{v} = \begin{bmatrix} 2\exp(-3t) + \exp(3t) \\ -\exp(-3t) + \exp(3t) \end{bmatrix}$$

O mesmo resultado poderia ser obtido a partir da equação diferencial de segunda ordem em v_1 (ou em v_2)

$$(p^2 - 9)v_1 = 0 \quad ; \quad v_1(0) = 3, \quad \dot{v}_1(0) = -3$$

Exemplo – Autovalores complexo-conjugados I

Exemplo 1.10 (Autovalores complexo-conjugados)

Considere o sistema na forma companheira

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

cuja equação característica é $\Delta(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$, com autovalores $\lambda_1 = 1 + j$, $\lambda_2 = 1 - j$.

Como os autovalores são distintos, os autovetores associados são linearmente independentes. De fato,

$$(A - (1 + j)I)q_1 = 0, \quad \begin{bmatrix} -1 - j & 1 \\ -2 & 1 - j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow q_1 = \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + j \end{bmatrix}$$

$$(A - (1 - j)I)q_2 = 0, \quad \begin{bmatrix} -1 + j & 1 \\ -2 & 1 + j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{21} \\ q_{22} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow q_2 = \begin{bmatrix} q_{21} \\ q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 - j \end{bmatrix}$$

Exemplo – Autovalores complexo-conjugados II

e, portanto, existe uma transformação de similaridade que leva a uma forma diagonal, com os autovalores na diagonal.

$$\hat{A} = Q^{-1}AQ = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+j & -j \\ 1-j & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1+j & 1-j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+j & 0 \\ 0 & 1-j \end{bmatrix}$$

Neste caso, os autovalores e os autovetores são complexos (os autovalores e os correspondentes autovetores formam pares complexo-conjugados). Uma alternativa à forma diagonal, que também explicita os autovalores, é dada por exemplo pela transformação de similaridade

$$S = [\operatorname{Re}(q_1) \operatorname{Im}(q_2)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \bar{A} = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz \bar{A} apresenta na diagonal principal a parte real dos autovalores e, na outra diagonal, a parte imaginária, e é chamada de forma modal.

Para obter a solução, tem-se

$$\exp(\bar{A}t) = \rho_0(t)I + \rho_1(t)A$$

Exemplo – Autovalores complexo-conjugados III

$$\exp((1+j)t) = \rho_0 + \rho_1(1+j), \quad \exp((1-j)t) = \rho_0 + \rho_1(1-j)$$

Subtraindo e somando as duas equações acima

$$2j\rho_1 = \exp((1+j)t) - \exp((1-j)t), \quad 2(\rho_0 + \rho_1) = \exp((1+j)t) + \exp((1-j)t)$$

obtem-se

$$\rho_1 = \exp(t)\text{sen}(t), \quad \rho_0 = \exp(t)(\cos(t) - \text{sen}(t))$$

$$\exp(\bar{A}t) = \begin{bmatrix} \rho_0 + \rho_1 & -\rho_1 \\ \rho_1 & \rho_0 + \rho_1 \end{bmatrix} = \exp(t) \begin{bmatrix} \cos(t) & -\text{sen}(t) \\ \text{sen}(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$$

$$\bar{v}(0) = S^{-1}v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}(t) = \exp(\bar{A}t)\bar{v}(0) = \exp(t) \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \text{sen}(t) \end{bmatrix}$$

e, finalmente,

$$v(t) = S\bar{v}(t) = \exp(t) \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \cos(t) - \text{sen}(t) \end{bmatrix}$$

Forma modal

Propriedade 16 (Forma modal)

As matrizes

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad \begin{bmatrix} \alpha - j\beta & 0 \\ 0 & \alpha + j\beta \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

são similares, pois

$$\det \left(\lambda I - \begin{bmatrix} \alpha - j\beta & 0 \\ 0 & \alpha + j\beta \end{bmatrix} \right) = \det \left(\lambda I - \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) = (\lambda - \alpha)^2 + \beta^2$$

A matriz

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

está na forma modal.

Exemplo

Exemplo 1.11

Os autovalores da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

são $1 \pm j$, $2 \pm 2j$ e 3, pois os autovalores de uma matriz diagonal por blocos são os autovalores de cada bloco.

Note que a forma modal (bloco diagonal) é uma alternativa nas transformações de similaridade que não requer a manipulação de números complexos.

Multiplicidade geométrica

Definição 2 (Multiplicidade geométrica)

A multiplicidade geométrica do autovalor λ é igual ao número de autovetores linearmente independentes associados a λ , isto é, é igual à dimensão do espaço nulo de $A - \lambda I$.

Exemplo I

Exemplo 1.12 (Autovalores iguais e autovetores linearmente independentes)

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Os autovalores são $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 3$. Note que nas matrizes triangulares, isto é, todos os elementos abaixo (ou acima) da diagonal principal são nulos, os autovalores são os elementos da diagonal principal.

Para o autovalor igual a -1 , tem-se a equação que define os autovetores

$$(A - (-1)I)q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \gamma = 0$$

Exemplo II

Note que $\text{null}(A + I) = 2$. Por exemplo, os autovetores associados a $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ são

$$q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad q_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O autovetor associado a $\lambda_3 = 3$ é dado por

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{13} \\ q_{23} \\ q_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow q_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Observe que a Propriedade 15 apresenta uma condição suficiente para a existência de autovetores linearmente independentes. Neste exemplo, o autovalor -1 possui multiplicidade algébrica igual a dois e foi possível determinar dois autovetores linearmente independentes associados. Portanto, a multiplicidade geométrica do autovalor também é igual a dois.

Exemplo III

Note que a multiplicidade geométrica do autovalor -1 é definida pela dimensão do espaço nulo de $A - (-1)I$, neste exemplo igual a dois.

Portanto, por construção,

$$\hat{A} = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

O sistema $\dot{v} = Av$, $v(0)$ tem como solução

$$\begin{aligned} v(t) &= \exp(At)v(0) = Q \exp(\hat{A}t) Q^{-1} v(0) \\ &= \begin{bmatrix} \exp(-t) & 0 & -0.25 \exp(-t) + 0.25 \exp(3t) \\ 0 & \exp(-t) & -0.5 \exp(-t) + 0.5 \exp(3t) \\ 0 & 0 & \exp(3t) \end{bmatrix} v(0) \end{aligned}$$

Exemplo – Sistema de segunda ordem não diagonalizável

Exemplo 1.13 (Sistema de segunda ordem não diagonalizável)

Considere a matriz A e seus autovalores

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

A matriz A tem apenas um autovetor associado ao autovalor -1 , dado por

$$(A - (-1)I)v_1 = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha = 2\beta, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, o autovalor -1 tem multiplicidade algébrica igual a dois (pois é raiz dupla) e multiplicidade geométrica unitária.

Assim, a matriz A não é diagonalizável, porém é possível encontrar uma transformação que leva a matriz a uma forma triangular quase diagonal \hat{A} .

Bloco de Jordan de ordem k

Definição 3 (Bloco de Jordan de ordem k)

Um bloco de Jordan de ordem k é uma matriz quadrada (triangular superior) de dimensão k , denotada J_k , com seu único autovalor de multiplicidade k na diagonal, uns na primeira subdiagonal superior e zeros nas demais.

Por exemplo,

$$J_1(\lambda) = [\lambda] , J_2(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} , J_3(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} , J_4(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

ou apenas J_1 , J_2 , J_3 e J_4 .

Exemplo – Cálculo de $\exp(J_2 t)$

Exemplo 1.14 (Cálculo de $\exp(J_2 t)$)

Considere o bloco de Jordan de segunda ordem

$$J_2 = \begin{bmatrix} \sigma & 1 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \sigma$$

$$\exp(\lambda t) = \rho_0(t) + \lambda \rho_1(t) \quad \Rightarrow \quad \exp(\sigma t) = \rho_0(t) + \sigma \rho_1(t)$$

$$\left. \frac{d}{d\lambda} \exp(\lambda t) \right|_{\lambda=\sigma} = t \exp(\sigma t) = \rho_1(t) \quad \Rightarrow \quad \rho_0(t) = \exp(\sigma t)(1 - \sigma t)$$

$$\exp(At) = \rho_0(t)I + \rho_1(t)A = \exp(\sigma t) \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo – Cálculo de $\exp(J_4 t)$ **Exemplo 1.15 (Cálculo de $\exp(J_4 t)$)**

Considere o bloco de Jordan de quarta ordem

$$J_4 = \begin{bmatrix} \sigma & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}$$

Note que o polinômio característico é dado por $\Delta(\lambda) = (\lambda - \sigma)^4$ e que σ também é raiz das derivadas (até a terceira ordem) de $\Delta(\lambda)$. Portanto,

$$r(\lambda, t) = \sum_{k=0}^3 \xi_k(t) (\lambda - \sigma)^k, \quad \text{que resulta em}$$

$$\xi_k(t) = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{d\lambda^k} \exp(\lambda t) \Big|_{\lambda=\sigma} = \frac{t^k}{k!} \exp(\sigma t)$$

$$\exp(At) = \exp(\sigma t) \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 & t^3/3! \\ 0 & 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Função de bloco de Jordan I

Propriedade 17 (Função de bloco de Jordan)

Considere um bloco de Jordan de ordem k e uma função $f(\lambda)$ diferenciável $k-1$ vezes. Então,

$$f(J_k) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & \dot{f}(\lambda) & \ddot{f}(\lambda)/2! & \cdots & f^{(k-1)}(\lambda)/(k-1)! \\ 0 & f(\lambda) & \dot{f}(\lambda) & \cdots & f^{(k-2)}(\lambda)/(k-2)! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\lambda) \end{bmatrix}_{\lambda=\sigma}$$

sendo σ o autovalor do bloco de Jordan.

Prova:

Pela Propriedade 7 (Briot-Ruffini)

$$f(\lambda) = \sum_{i=0}^{k-1} \xi_i (\lambda - \sigma)^i \Rightarrow \xi_i = \frac{1}{i!} \frac{d^i}{d\lambda^i} f(\lambda) \Big|_{\lambda=\sigma}$$

Além disso, utiliza-se o fato de que, por exemplo, para $k=4$, tem-se

Função de bloco de Jordan II

$$M = (J_4 - \sigma I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \dots$$

Bloco de Jordan na forma modal

Propriedade 18 (Bloco de Jordan na forma modal)

As matrizes

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta & 1 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \quad \begin{bmatrix} \alpha - j\beta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - j\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + j\beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha + j\beta \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$$

são similares, pois os autovalores de uma matriz bloco triangular são os autovalores dos blocos da diagonal.

Note que a forma modal de Jordan é uma alternativa que não requer a manipulação de números complexos.

Exemplo: forma de Jordan com matrizes

Exemplo 1.16

Como

$$f\left(\begin{bmatrix} \sigma & 1 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f(\sigma) & \dot{f}(\sigma) \\ 0 & f(\sigma) \end{bmatrix}$$

por extensão, tem-se

$$f\left(\begin{bmatrix} A & I \\ 0 & A \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f(A) & \dot{f}(A) \\ 0 & f(A) \end{bmatrix}$$

Exemplo

Exemplo 1.17

Considere a matriz A na forma modal de Jordan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Então,

$$\exp(At) = \exp(t) \begin{bmatrix} \cos(t) & -\text{sen}(t) & t \cos(t) & -t \text{sen}(t) \\ \text{sen}(t) & \cos(t) & t \text{sen}(t) & t \cos(t) \\ 0 & 0 & \cos(t) & -\text{sen}(t) \\ 0 & 0 & \text{sen}(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$$

Propriedade

Propriedade 19

Considere a matriz de dimensão k dada por

$$M = (J_k - \lambda I)$$

com λ autovalor de J_k . Então

- O rank da matriz M é $k - 1$, implicando que a dimensão do espaço nulo de M é 1 e, portanto, o autovalor λ tem multiplicidade geométrica igual a um e apenas um autovetor associado.
- O rank da matriz M^i é $k - i$, $i = 0, \dots, k$. Portanto, a dimensão do espaço nulo de M^i aumenta com i até $i = k$, com $M^k = 0$.

Forma de Jordan I

Propriedade 20 (Forma de Jordan)

Qualquer matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pode ser colocada na forma de Jordan por meio de uma transformação de similaridade.

Se A possuir n autovetores linearmente independentes, a forma de Jordan é diagonal e a matriz de transformação Q é composta pelos autovetores.

Se A possui $r < n$ autovetores linearmente independentes, sua forma de Jordan é diagonal por blocos com r blocos de Jordan.

Em outras palavras, para A qualquer, existe Q não singular tal que

$$\hat{A} = Q^{-1}AQ = \text{diag}(J_{k_1}, J_{k_2}, \dots, J_{k_r})$$

com os blocos J_{k_i} , $i = 1, \dots, r$ na forma de Jordan (não necessariamente diagonais).

A forma de Jordan de uma matriz A é única (a menos de permutações dos blocos).

Forma de Jordan II

Por simplicidade, considere uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com um autovalor λ de multiplicidade algébrica igual a n . O procedimento para a obtenção da forma de Jordan segue os seguintes passos.

- Compute

$$M = (A - \lambda I)$$

e a dimensão r do espaço nulo de M . O número de blocos de Jordan é igual a r e a soma dos tamanhos de cada um dos blocos é igual a n . Note que r é a multiplicidade geométrica de λ , ou seja, o número de autovetores linearmente independentes associados a λ .

- A dimensão do maior bloco é igual ao menor k tal que

$$M^k = 0$$

- O número de blocos de dimensão i , $1 \leq i \leq k$ é igual a

$$\text{rank}(M^{i-1}) - 2\text{rank}(M^i) + \text{rank}(M^{i+1})$$

Exemplo – Forma de Jordan $\text{diag}(J_3, J_1)$ IExemplo 1.18 (Forma de Jordan $\text{diag}(J_3, J_1)$)

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \det(\lambda I - A) = (\lambda - 4)^4$$

Computando M^i , tem-se

$$M = (A - 4I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(M) = 2,$$

$$M^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(M^2) = 1, \quad M^3 = 0$$

Exemplo – Forma de Jordan $\text{diag}(J_3, J_1)$ II

Portanto, a forma de Jordan possui 2 blocos (pois a dimensão do espaço nulo de M é dois) e o maior bloco tem dimensão 3 (pois $M^3 = 0$ e $M^2 \neq 0$). Como consequência, o outro bloco é de tamanho 1. A forma de Jordan é dada por

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Exemplo – Forma de Jordan $\text{diag}(J_2, J_1, J_1) I$ **Exemplo 1.19** (Forma de Jordan $\text{diag}(J_2, J_1, J_1)$)

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \det(\lambda I - A) = (\lambda - 4)^4$$

Computando M^i , tem-se

$$M = (A - 4I) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(M) = 1, \quad M^2 = 0$$

Exemplo – Forma de Jordan $\text{diag}(J_2, J_1, J_1)$ II

Portanto, a forma de Jordan possui 3 blocos (pois a dimensão do espaço nulo de M é três) sendo um de tamanho dois e dois de tamanho um. De fato, $M^2 = 0$ comprova que o maior bloco é de dimensão 2. A forma de Jordan é dada por

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Exemplo – Forma de Jordan $\text{diag}(J_2, J_2)$ I**Exemplo 1.20** (Forma de Jordan $\text{diag}(J_2, J_2)$)

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \det(\lambda I - A) = (\lambda - 4)^4$$

Computando M^i , tem-se

$$M = (A - 4I) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(M) = 2, \quad M^2 = 0$$

Exemplo – Forma de Jordan $\text{diag}(J_2, J_2)$ II

Portanto, a forma de Jordan possui 2 blocos (pois a dimensão do espaço nulo de M é dois) sendo o maior de tamanho dois e, como consequência, o outro também tem tamanho dois. A forma de Jordan é dada por

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Exemplo – Forma de Jordan $\text{diag}(J_4)$ I**Exemplo 1.21** (Forma de Jordan $\text{diag}(J_4)$)

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -16 & 32 & -24 & 8 \end{bmatrix}, \quad \det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)^4$$

Computando M^i , tem-se

$$M = (A - 4I) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ -16 & 32 & -24 & 6 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(M) = 3, \quad M^2 = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \\ -16 & 32 & -20 & 4 \\ -64 & 112 & -64 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(M^2) = 2, \quad M^3 = \begin{bmatrix} -8 & 12 & -6 & 1 \\ -16 & 24 & -12 & 2 \\ -32 & 48 & -24 & 4 \\ -64 & 96 & -48 & 8 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(M^3) = 1, \quad M^4 = 0$$

Exemplo – Forma de Jordan $\text{diag}(J_4)$ II

A forma de Jordan, obtida no cálculo de M , pois o espaço nulo tem dimensão um, é dada por

$$\hat{A} = J_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Forma de Jordan — procedimento para autovalores distintos II

- A dimensão do maior bloco é igual ao menor k tal que

$$v(M_\lambda^k) = n_\lambda$$

que é denominado k_λ . Note que $v(M_\lambda^k) = n_\lambda$ para $\forall k \geq k_\lambda$.

- O número de blocos de dimensão i , $1 \leq i \leq k_\lambda$, é determinado a partir da dimensão do espaço nulo das matrizes M_λ^i . Assim, o número de blocos de dimensão i , $1 \leq i \leq k_\lambda$ pode ser determinado por

$$2v(M_\lambda^i) - v(M_\lambda^{i-1}) - v(M_\lambda^{i+1})$$

- A forma de Jordan \hat{A} é a matriz bloco diagonal composta pelos blocos de Jordan de cada autovalor.

Exemplo I

Exemplo 1.22

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & 20 & -18 & 7 \end{bmatrix}, \quad \det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)^3(\lambda - 1)$$

Para $\lambda = 2$ (que tem multiplicidade algébrica 3), tem-se

$$M_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ -8 & 20 & -18 & 5 \end{bmatrix}, \quad v(M_2) = 4 - 3 = 1$$

Exemplo II

Computando M_2^i , tem-se

$$M_2^2 = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \\ -8 & 20 & -14 & 3 \\ -24 & 52 & -34 & 7 \end{bmatrix}, \quad v(M_2^2) = 4 - 2 = 2 \quad ,$$

$$M_2^3 = \begin{bmatrix} -8 & 12 & -6 & 1 \\ -8 & 12 & -6 & 1 \\ -8 & 12 & -6 & 1 \\ -8 & 12 & -6 & 1 \end{bmatrix}, \quad v(M_2^3) = 4 - 1 = 3$$

Note que 3 é o maior valor possível para a dimensão do espaço nulo de M_2^i , isto é, a multiplicidade geométrica de $\lambda = 2$ é no máximo igual à multiplicidade algébrica. De fato, $v(M_2^k) = 3, \forall k \geq 3$.

Como o valor de dimensão de espaço nulo igual a 3 foi atingido para $i = 3$, tem-se que há apenas um bloco de Jordan associado ao autovalor $\lambda = 2$. De fato,

$$i = 1 \quad \Rightarrow \quad 2v(M_2) - v(M_2^0) - v(M_2^2) = 2 - 0 - 2 = 0$$

Exemplo III

$$i = 2 \Rightarrow 2v(M_2^2) - v(M_2^1) - v(M_2^3) = 4 - 1 - 3 = 0$$

$$i = 3 \Rightarrow 2v(M_2^3) - v(M_2^2) - v(M_2^4) = 6 - 2 - 3 = 1$$

ou seja, não há blocos de tamanhos 1 e 2 associados ao autovalor $\lambda = 2$.

Note que na expressão envolvendo os *ranks* deveria ser feita uma correção na fórmula devido à presença de autovalores distintos.

Calculando M_1 , tem-se

$$M_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -8 & 20 & -18 & 6 \end{bmatrix}, \quad v(M_1) = 4 - 3 = 1$$

e portanto há apenas um bloco de Jordan (de tamanho 1) associado ao autovalor $\lambda = 1$. De fato,

$$M_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -8 & 20 & -17 & 5 \\ -40 & 92 & -70 & 18 \end{bmatrix}, \quad v(M_1^2) = 4 - 3 = 1$$

Exemplo IV

A forma de Jordan é dada por

$$\hat{A} = \text{diag}(J_3(2), J_1(1)) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformação de similaridade para a forma de Jordan

Propriedade 22 (Transformação de similaridade para a forma de Jordan)

A transformação de similaridade Q (não singular) que produz a forma de Jordan pode ser obtida do sistema linear de equações

$$AQ = Q \text{diag}(J_{k_1}, J_{k_2}, \dots, J_{k_r})$$

Cadeia de autovetores generalizados I

Definição 4 (Cadeia de autovetores generalizados)

A transformação de similaridade que leva à forma de Jordan é composta, para cada bloco de Jordan de ordem k , de uma cadeia de k vetores linearmente independentes, sendo o primeiro um autovetor e os demais autovetores generalizados.

Por exemplo, para o primeiro bloco (tamanho $k = 4$, autovalor λ), tem-se

$$A[v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4] = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4] J_4 = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4] \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$Av_1 = \lambda v_1, \quad Av_2 = v_1 + \lambda v_2, \quad Av_3 = v_2 + \lambda v_3, \quad Av_4 = v_3 + \lambda v_4$$

com v_1 autovetor (ou autovetor generalizado de ordem 1). A cadeia de 4 autovetores generalizados é dada por $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, sendo v_2 um autovetor generalizado de ordem 2, v_3 um autovetor generalizado de ordem 3 e v_4 um autovetor generalizado de ordem 4.

Cadeia de autovetores generalizados II

Note que um autovetor generalizado não é invariante com a multiplicação por escalar, mas a cadeia de autovetores associada a um bloco de Jordan é invariante com a multiplicação por escalar.

O cálculo da matriz de transformação de similaridade Q passa pela determinação da forma de Jordan, que pressupõe precisão na determinação dos autovalores. Como consequência, trata-se de um método não robusto numericamente. No Matlab, o comando $[Q, Ah]=\text{Jordan}(A)$ retorna a matriz de transformação Q e a forma de Jordan \hat{A} .

Exemplo 1

Exemplo 1.23

A matriz de transformação de similaridade Q do Exemplo 1.18 pode ser calculada pelo seguinte procedimento.

$$M = (A - 4I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, Mv_1 = M \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b - d = 0 \\ 2a + b - 2c - d = 0 \\ b - d = 0 \\ -2a + b + 2c - d = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = [a \quad b \quad a \quad b]'$$

Note que com a escolha de a e b pode-se determinar uma base (de dimensão 2) para o espaço nulo de M , o que está de acordo com o fato de que a forma de Jordan possui dois blocos. A escolha de a e b é feita a partir das demais equações da cadeia de autovetores generalizados.

Exemplo II

Assim, v_1 e v_2 devem satisfazer

$$Mv_2 = v_1 \Rightarrow M \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} f - h = a \\ 2e + f - 2g - h = b \\ f - h = a \\ -2e + f + 2g - h = b \end{cases}$$

Isto é, v_1 pertence ao espaço nulo e ao *range* de M . Para que exista v_2 , tem-se $a = b$ e portanto

$$v_1 = [a \ a \ a \ a]' \quad , \quad v_2 = [e \ f \ e \ f - a]'$$

Note que, se $a \neq b$, não existe v_2 , a cadeia associada tem tamanho 1 e o autovetor associado ao bloco J_1 pode ser escolhido como

$$[1 \ 0 \ 1 \ 0]'$$

Os autovetores generalizados v_2 e v_3 devem satisfazer

$$Mv_3 = v_2 \Rightarrow M \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \\ e \\ f - a \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} q - s = e \\ 2p + q - 2r - s = f \\ q - s = e \\ -2p + q + 2r - s = f - a \end{cases}$$

Exemplo III

Portanto,

$$v_1 = [a \ a \ a \ a]' , \ v_2 = [e \ e + a/2 \ e \ e - a/2]' , \ v_3 = [p \ q \ p - a/4 \ q - e]'$$

Note que não existe um v_4 tal que

$$Mv_4 = v_3 \Rightarrow M \begin{bmatrix} t \\ u \\ v \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ p - a/4 \\ q - e \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u - x = p \\ 2t + u - 2v - x = q \\ u - x = p - a/4 \\ -2t + u + 2v - x = q - e \end{cases}$$

pois $a \neq 0$. Assim, a cadeia é dada por

$$v_1 = [4 \ 4 \ 4 \ 4]' , \ v_2 = [0 \ 2 \ 0 \ -2]' , \ v_3 = [0 \ 0 \ -1 \ 0]'$$

e a matriz Q é

$$Q = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1

Exemplo 1.24

Para o cálculo da matriz de transformação de similaridade Q do Exemplo 1.21, tem-se

$$M = (A - 2I) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ -16 & 32 & -24 & 6 \end{bmatrix}, \quad Mv_1 = M \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b - 2a = 0 \\ c - 2b = 0 \\ d - 2c = 0 \\ -16a + 32b - 24c + 6d = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = [a \quad 2a \quad 4a \quad 8a]'$$

Como a dimensão do espaço nulo de M é um, v_1 é o único autovetor e a forma de Jordan tem um único bloco J_4 . Escolhendo $a = 1$,

$$v_1 = [1 \quad 2 \quad 4 \quad 8]'$$

Exemplo II

tem-se

$$Mv_2 = v_1 \Rightarrow M \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} e \\ 2e+1 \\ 4e+4 \\ 8e+12 \end{bmatrix}$$

Escolhendo $e = 0$,

$$v_2 = [0 \quad 1 \quad 4 \quad 12]'$$

tem-se

$$Mv_3 = v_2 \Rightarrow M \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} p \\ 2p \\ 4p+1 \\ 8p+6 \end{bmatrix}$$

Escolhendo $p = 0$,

$$v_3 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 6]'$$

tem-se

$$Mv_4 = v_3 \Rightarrow M \begin{bmatrix} t \\ u \\ v \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} t \\ 2t \\ 4t \\ 8t+1 \end{bmatrix}$$

Exemplo III

Escolhendo $t = 0$,

$$v_4 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]'$$

Assim,

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 \\ 8 & 12 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1

Exemplo 1.25

Para calcular a matriz Q do Exemplo 1.19, tem-se

$$M = (A - 4I) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad Mv_1 = M \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow a + b - d = 0$$
$$\Rightarrow v_1 = [a \quad b \quad c \quad a+b]'$$

Como a dimensão do espaço nulo de M é três, são três blocos de Jordan. Portanto um dos blocos é de tamanho 2 e os outros dois são de tamanho 1. De fato, $M^2 = 0$. Assim, v_1 e v_2 devem satisfazer

$$Mv_2 = v_1 \Rightarrow M \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ a+b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} e + f - h = a \\ 0 = b \\ 0 = c \\ e + f - h = a + b \end{cases}$$

Exemplo II

resultando em

$$v_1 = [a \ 0 \ 0 \ a]' , \quad v_2 = [e \ f \ g \ e+f-a]'$$

Assim, Q pode ser escolhido

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1

Exemplo 1.26

Calculando Q do Exemplo 1.20, tem-se

$$M = (A - 4I) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad Mv_1 = M \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a + b + 2c - d = 0 \\ -2c = 0 \\ a + b - d = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = [a \quad b \quad 0 \quad a + b]'$$

Como a dimensão do espaço nulo de M é dois, são dois blocos de Jordan. Como $M^2 = 0$, são dois blocos de tamanho dois. Assim, v_1 e v_2 devem satisfazer

$$Mv_2 = v_1 \Rightarrow M \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \\ a + b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} e + f + 2g - h = a \\ -2g = b \\ e + f - h = a + b \end{cases}$$

Exemplo II

resultando em

$$v_1 = [a \quad b \quad 0 \quad a+b]' , \quad v_2 = [e \quad f \quad -b/2 \quad e+f-a-b]'$$

Assim, Q pode ser escolhido

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Exemplo 1.27

Para escolher matrizes A , c e v_0 tais que o sistema

$$\dot{v} = Av \quad , \quad y = cv \quad , \quad v(0) = v_0$$

produza a saída $y(t) = 3t^2 \exp(-2t)$, pode-se utilizar a forma de Jordan.

Necessariamente, a matriz A deve possuir o autovalor -2 com multiplicidade algébrica 3 e multiplicidade geométrica 1, ou seja, a forma de Jordan deve conter o bloco

$$J_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \exp(J_3 t) = \exp(-2t) \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, uma possível solução é dada por

$$A = J_3 \quad , \quad v_0 = [0 \quad 0 \quad 1]' \Rightarrow v(t) = \exp(-2t) [t^2/2 \quad t \quad 1]'$$

$\Rightarrow c = [6 \quad 0 \quad 0]$ Note que outras matrizes, inclusive de dimensões maiores, poderiam ser usadas para gerar o mesmo sinal $y(t)$. A opção apresentada é a de menor dimensão.

Solução da equação não homogênea

Considere as equações de estado e de saída do sistema SISO

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad v(0) = v_0 \quad , \quad y = cv + dx \quad (4)$$

Aplicando a transformada de Laplace, tem-se

$$sV(s) - v_0 = AV(s) + bX(s) \quad , \quad Y(s) = cV(s) + dX(s)$$

sendo $V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\}$, $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ e $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$.

Portanto,

$$Y(s) = c(sI - A)^{-1}v_0 + (c(sI - A)^{-1}b + d)X(s)$$

A função de transferência é dada por ($v_0 = 0$)

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = c(sI - A)^{-1}b + d$$

Exemplo I

Exemplo 1.29

Considere o sistema dado por

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} v$$

Computando $(sI - A)^{-1}$ por Cayley-Hamilton, tem-se

$$(sI - A)^{-1} = \rho_0(s)I + \rho_1(s)A$$

com $\rho_0(s)$ e $\rho_1(s)$ obtidos das equações

$$(s+1)^{-1} = \rho_0(s) - \rho_1(s) \quad , \quad (s+2)^{-1} = \rho_0(s) - 2\rho_1(s)$$

Exemplo II

$$\rho_0(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}, \quad \rho_1(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

Para a entrada $X(s) = 1/s$ (degrau unitário), tem-se

$$Y(s) = c(sI - A)^{-1}(v_0 + bX(s)) = [1 \quad 0] (sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1/s \end{bmatrix} = \frac{s^2 + 3s + 1}{s(s+1)(s+2)}$$

$$Y(s) = \frac{1/2}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{-1/2}{s+2}$$

Convolução

Considere novamente o sistema SISO (4) cuja equação de estado é dada por

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad v(0) = v_0$$

Multiplicando ambos os lados por $\exp(-At)$ e reagrupando, tem-se

$$\exp(-At)\dot{v} - \exp(-At)Av = \frac{d}{dt}(\exp(-At)v) = \exp(-At)bx$$

Integrando de 0 a t , tem-se

$$\exp(-At)v(t) - v_0 = \int_0^t \exp(-A\beta)bx(\beta)d\beta = \int_0^{+\infty} \exp(-A\beta)bx(\beta)u(t-\beta)d\beta$$

Multiplicando por $\exp(At)$ e considerando $x(t) = x(t)u(t)$, tem-se

$$v(t) = \underbrace{\exp(At)v_0}_{v_{en}(t)} + \underbrace{(\exp(At)u(t)) * (bx(t)u(t))}_{v_{cin}(t)}$$

Observe as contribuições isoladas devido à entrada e devido à condição inicial.

Exemplo 1

Exemplo 1.30

Considere o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x, \quad v(0) = v_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} v$$

cujos autovalores são -1 e -2 . Computando $\exp(At)$ por Cayley-Hamilton, tem-se

$$\exp(At) = \rho_0(t)I + \rho_1(t)A$$

com $\rho_0(t)$ e $\rho_1(t)$ obtidos das equações

$$\exp(-t) = \rho_0(t) - \rho_1(t) \quad , \quad \exp(-2t) = \rho_0(t) - 2\rho_1(t)$$

$$\Rightarrow \quad \rho_0(t) = 2\exp(-t) - \exp(-2t) \quad , \quad \rho_1(t) = \exp(-t) - \exp(-2t)$$

Exemplo II

$$\exp(At) = \begin{bmatrix} 2\exp(-t) - \exp(-2t) & \exp(-t) - \exp(-2t) \\ -2\exp(-t) + 2\exp(-2t) & -\exp(-t) + 2\exp(-2t) \end{bmatrix}$$

A resposta à entrada nula $v_{en}(t)$ é dada por

$$v_{en}(t) = \exp(At)v_0 = \begin{bmatrix} 2\exp(-t) - \exp(-2t) \\ -2\exp(-t) + 2\exp(-2t) \end{bmatrix}$$

e a resposta à condição inicial nula $v_{cin}(t)$ para $x(t) = u(t)$ (degrau unitário) é

$$v_{cin}(t) = (\exp(At)u(t)) * (bu(t)) = (\exp(At)bu(t)) * u(t) =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} \exp(-t) - \exp(-2t) \\ -\exp(-t) + 2\exp(-2t) \end{bmatrix} u(t) \right) * u(t) = \begin{bmatrix} 0.5 - \exp(-t) + 0.5\exp(-2t) \\ \exp(-t) - \exp(-2t) \end{bmatrix}$$

Exemplo III

A solução $v(t)$ é dada por

$$v(t) = v_{en}(t) + v_{cin}(t) = \begin{bmatrix} 0.5 + \exp(-t) - 0.5 \exp(-2t) \\ -\exp(-t) + \exp(-2t) \end{bmatrix} u(t)$$

Em termos da saída $y(t)$, tem-se

$$y = (0.5 + \exp(-t) - 0.5 \exp(-2t)) u(t)$$

Sistema homogêneo aumentado

Considere novamente o sistema SISO cuja equação de estado é dada por

$$\dot{v} = Av + bx, \quad v(0) = v_0, \quad y = cv + dx$$

sendo $x(t)$ solução da equação de estado homogênea

$$\dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v}, \quad \bar{v}(0) = \bar{v}_0, \quad x = \bar{c}\bar{v}$$

A solução $v(t)$ do sistema original não homogêneo pode ser obtida a partir da solução do sistema homogêneo dado por

$$\dot{\tilde{v}} = \tilde{A}\tilde{v}, \quad \tilde{v}(0) = \begin{bmatrix} v_0 \\ \bar{v}_0 \end{bmatrix}, \quad y = \tilde{c}\tilde{v}$$

com

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\bar{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & b\bar{c} \\ 0 & \bar{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \bar{v} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v(0) \\ \bar{v}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ \bar{v}_0 \end{bmatrix}, \quad y = [c \quad d\bar{c}] \begin{bmatrix} v \\ \bar{v} \end{bmatrix}$$

Exemplo

Exemplo 1.31

Considere o sistema dado por

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x \quad , \quad v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} v$$

com a entrada $x(t) = 1$.

Portanto,

$$\dot{\bar{v}} = 0\bar{v} \quad , \quad \bar{v}(0) = 1 \quad , \quad x = c\bar{v} = 1\bar{v}$$



Assim,

$$\begin{aligned} \exp(\tilde{A}t) &= \exp \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} t \right) \\ &= \begin{bmatrix} 2\exp(-t) - \exp(-2t) & \exp(-t) - \exp(-2t) & -\exp(-t) + 0.5\exp(-2t) + 0.5 \\ 2\exp(-2t) - 2\exp(-t) & -\exp(-t) + 2\exp(-2t) & \exp(-t) - \exp(-2t) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ y(t) &= [1 \quad 0 \quad 0] \exp(\tilde{A}t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \exp(-t) - 0.5\exp(-2t) + 0.5 \end{aligned}$$