

Livro (e-book): Linearidade em Sinais e Sistemas,
Ivanil S. Bonatti, Amauri Lopes, Pedro L. D. Peres,
Cristiano M. Agulhari,

Ed. Blucher, SP, 2015, 1ed., ISBN: 9788521208921.

Prof. Pedro L. D. Peres

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

Pontos de equilíbrio

Definição 2 (Pontos de equilíbrio)

Os vetores \bar{v} solução do sistema de equações invariante no tempo

$$f(\bar{v}, \bar{x}) = 0$$

para $x(t) = \bar{x}$ constante são denominados pontos de equilíbrio.

Sistemas lineares invariantes no tempo podem ser representados por equações matriciais em termos das variáveis de estado, das entradas e saídas

$$\dot{v} = Av + Bx \quad (2)$$

$$y = Cv + Dx \quad (3)$$

sendo $v(t) \in \mathbb{R}^m$ o vetor de variáveis de estado, $x(t)$ o vetor de entradas e $y(t)$ o vetor de saídas. A equação (2) é chamada de equação dinâmica, sendo A a matriz dinâmica do sistema e B a matriz de entradas, e a equação (3) é chamada de equação de saída, sendo C a matriz de saídas e D a matriz de transmissão direta.

Sistema linearizado

Definição 3 (Sistema linearizado)

Uma aproximação de primeira ordem pode representar o sistema em torno do ponto de equilíbrio. Assim, utilizando o jacobiano tem-se

$$A = \left. \left[\frac{\partial f_i}{\partial v_j} \right] \right|_{\bar{v}, \bar{x}}, \quad B = \left. \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] \right|_{\bar{v}, \bar{x}}$$
$$C = \left. \left[\frac{\partial g_i}{\partial v_j} \right] \right|_{\bar{v}, \bar{x}}, \quad D = \left. \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right] \right|_{\bar{v}, \bar{x}}$$

Neste texto, apenas entradas e saídas escalares (sistemas SISO) são consideradas, implicando que $B = b$ (vetor coluna), $C = c$ (vetor linha) e $D = d$ (escalar).

Exemplo – Lotka-Volterra

Exemplo 1.2 (Lotka-Volterra)

O modelo de Lotka-Volterra descreve, de maneira simplificada, a relação entre quantidade de predadores v_1 e de presas v_2 num habitat com disponibilidade infinita de alimento para as presas.

$$\dot{v}_1 = f_1(v_1, v_2) = -av_1 + bv_1v_2 \quad , \quad \dot{v}_2 = f_2(v_1, v_2) = cv_2 - dv_1v_2$$

Os parâmetros a , b , c e d são positivos e representam: a é a taxa de morte do predador, por fome e envelhecimento; b é o fator de ganho (para os predadores) quando do encontro com a presa; c é a taxa de expansão da população de presas (livres dos predadores); d é o fator de perda (para as presas) quando do encontro com o predador.

Os pontos de equilíbrio são $(0,0)$ (desaparecimento das populações) e $(c/d, a/b)$.

Exemplo – Lotka-Volterra

O jacobiano do sistema é dado por

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial v_j} \right] = \begin{bmatrix} -a + bv_2 & bv_1 \\ -dv_2 & c - dv_1 \end{bmatrix}$$

No ponto de equilíbrio $(0,0)$, tem-se a representação linearizada do sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

que corresponde a dois sistemas de primeira ordem desacoplados, um que cresce exponencialmente com c (presa) e outro que decresce exponencialmente com a (predador).

No ponto de equilíbrio $(c/d, a/b)$, tem-se a representação linearizada do sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & bc/d \\ -ad/b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

na qual as variáveis representam os desvios em relação ao ponto de equilíbrio.

Exemplo – Lotka-Volterra

Escrevendo a equação de segunda ordem em v_1 (predador), tem-se

$$\ddot{v}_1 + acv_1 = 0$$

que produz soluções puramente oscilatórias com frequência \sqrt{ac} (em radianos), indicando que o número de predadores em torno de c/d alterna-se periodicamente com período $T = 2\pi/\sqrt{ac}$.

A mesma equação diferencial é obtida na variável v_2 (presa), indicando que o número de presas alterna-se periodicamente em torno de a/b .

As Figuras 1 e 2 mostram a evolução do sistema não-linear ($a = b = c = d = 1$) para as condições iniciais $(0.1, 1)$ (Figura 1), $(0.9, 1.1)$ (Figura 2, esquerda) e $(0.1, 0.1)$ (Figura 2, direita). As trajetórias foram obtidas por simulação numérica, algoritmo de Runge-Kutta. Note que o período das oscilações é aproximadamente igual a 8 na Figura 1 e 7 na Figura 2 (esquerda), enquanto que o período do sistema linearizado é 2π . O menor desvio no segundo caso decorre da proximidade da condição inicial com o ponto de linearização.

Exemplo – Lotka-Volterra

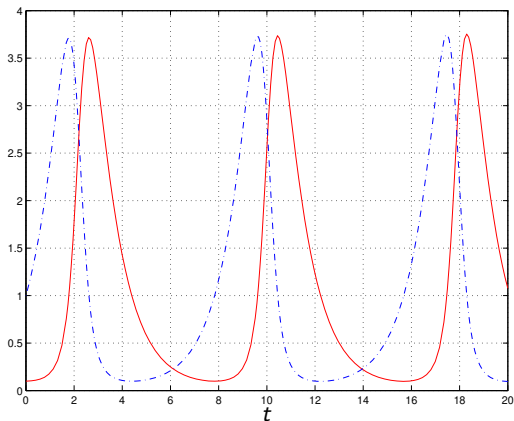


Figura: Predadores (curva contínua) e presas (traço-e-ponto) para condição inicial $(0.1, 1)$.

Exemplo – Lotka-Volterra

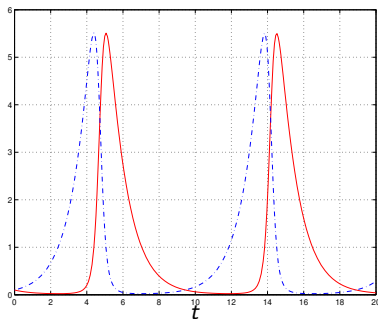
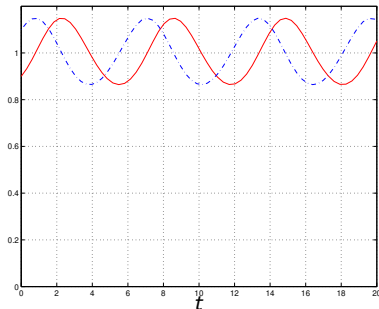


Figura: Predadores (curva contínua) e presas (traço-e-ponto) para condição inicial $(0.9, 1.1)$ (esquerda) e $(0.1, 0.1)$ (direita).

Espaço de fases

Definição 4 (Espaço de fases)

É a representação espacial das trajetórias de um sistema dinâmico em coordenadas de variáveis de estado, tendo como variável implícita o tempo, chamada de plano de fase quando apenas duas das variáveis são representadas.

Propriedade 1 (Plano de fase)

Não há cruzamento de trajetórias no espaço de fases, pois o sistema não pode evoluir diferentemente a partir de um mesmo ponto.

Exemplo 1.3

Os planos de fase do Exemplo 1.2 (Lotka-Volterra) são mostrados na Figura 3.

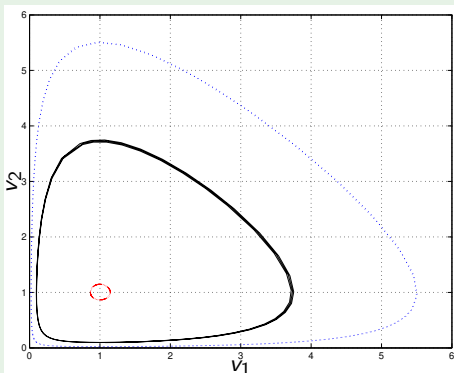


Figura: Planos de fase para as condições iniciais $(0.1, 0.1)$ (curva pontilhada), $(0.9, 1.1)$ (tracejada) e $(0.1, 1)$ (contínua) do modelo de Lotka-Volterra ($a = b = c = d = 1$).

Exemplo – Circuito RC **Exemplo 1.4** (Circuito RC)

Considere o circuito RC descrito na Figura 4 com $\tau = RC$.

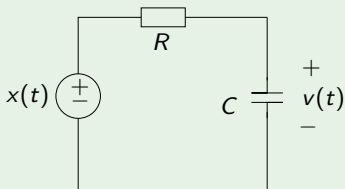


Figura: Circuito RC .

Considerando como saída a tensão $y(t)$ no resistor, têm-se as equações de estado e de saída

$$\dot{v} = -\frac{1}{\tau}v + \frac{1}{\tau}x \quad , \quad y = -v + x$$

Exemplo – Circuito *RLC* I

Exemplo 1.5 (Circuito *RLC*)

As equações de estado do circuito da Figura 5 são

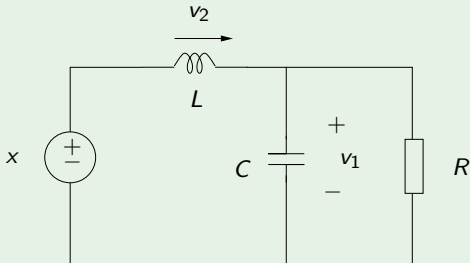


Figura: Circuito *RLC*.

Exemplo – Circuito *RLC* II

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/(RC) & 1/C \\ -1/L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} 1/R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

A equação diferencial em y (corrente no resistor) é dada por

$$\left(p^2 + \frac{1}{RC}p + \frac{1}{LC} \right) y = \frac{1}{RLC} x$$

Exemplo – Circuito de terceira ordem I

Exemplo 1.6 (Circuito de terceira ordem)

As equações de estado do circuito da Figura 6 são

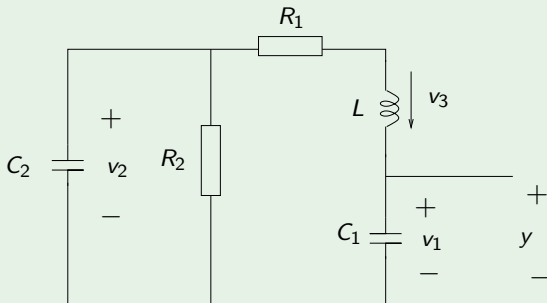


Figura: Circuito de terceira ordem.

Exemplo – Circuito de terceira ordem II

$$\dot{v}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_1} \\ 0 & -\frac{1}{R_2 C_2} & -\frac{1}{C_2} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} & -\frac{R_1}{L} \end{bmatrix} v(t) \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] v$$

Esse circuito é usado para simular surtos de alta tensão (raios) em laboratório. O capacitor C_2 , inicialmente carregado, transfere a energia para o capacitor C_1 gerando um pulso cujo tempo de subida é da ordem de $1\mu s$ e que cai a 50% de seu valor em cerca de $50\mu s$. Valores típicos: $C_2 = 0.6\mu F$, $C_1 = 0.001\mu F$, $R_1 = 350\Omega$, $R_2 = 115\Omega$ e $L = 200\mu H$ (indutância parasita).

Exemplo – Circuito de terceira ordem III

A equação diferencial homogênea de terceira ordem em y é

$$\left(p^3 + \left(\frac{R_1}{L} + \frac{1}{R_2 C_2} \right) p^2 + \left[\frac{1}{LC_1} + \frac{1}{LC_2} \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \right] p + \frac{1}{LC_1 R_2 C_2} \right) y = 0$$

Supondo todos os parâmetros iguais a 1, tem-se

$$\dot{v}_1 = v_3, \quad \dot{v}_2 = -v_2 - v_3, \quad \dot{v}_3 = -v_1 + v_2 - v_3, \quad y = v_1$$

cuja implementação usando integradores é mostrada na Figura 7.

Exemplo – Circuito de terceira ordem IV

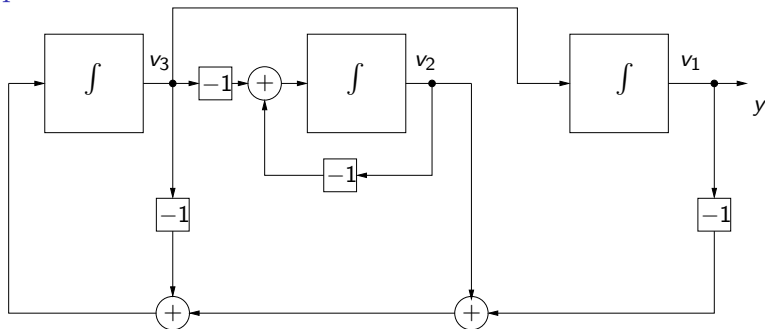


Figura: Implementação com integradores do circuito do Exemplo 1.5 (circuito de terceira ordem).

Muitos sistemas dinâmicos são descritos por equações diferenciais que não estão na forma de variáveis de estado. Neste caso, é preciso definir variáveis de estado internas de maneira conveniente.

Exemplo – Pêndulo simples I

Exemplo 1.7 (Pêndulo simples)

O pêndulo simples de comprimento ℓ , oscilando em um plano vertical, sujeito ao atrito de fricção no engate e sustentando na extremidade livre uma massa m é descrito pela equação

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\text{sen}(\theta) - mb\dot{\theta}$$

sendo θ o ângulo com a vertical, g a aceleração da gravidade e b o coeficiente de atrito.

Definindo-se

$$v_1 = \theta \quad , \quad v_2 = \dot{\theta}$$

tem-se

$$\dot{v}_1 = v_2 \quad , \quad \dot{v}_2 = -\frac{g}{\ell}\text{sen}(v_1) - \frac{b}{\ell}v_2$$

Exemplo – Pêndulo simples II

Os pontos de equilíbrio são $(0,0)$ e $(\pi,0)$.

O jacobiano é dado por

$$\left[\frac{\partial f_j}{\partial v_j} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(g/\ell)\cos(v_1) & -b/\ell \end{bmatrix}$$

Linearizando o sistema em torno de $(0,0)$, tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g/\ell & -b/\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

cuja equação característica é

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 + \frac{b}{\ell}\lambda + \frac{g}{\ell} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{-b}{2\ell} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{b}{\ell}\right)^2 - \frac{4g}{\ell}}$$

implicando que as raízes da equação têm parte real negativa (sistema estável). Note que para $b < 2\sqrt{g\ell}$, as raízes são complexas conjugadas (oscilação). Além disso, se $b = 0$, a frequência angular da oscilação é $\sqrt{g/\ell}$.

Exemplo – Pêndulo simples III

Linearizando o sistema em torno de $(\pi, 0)$, tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g/\ell & -b/\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

cuja equação característica é

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 + \frac{b}{\ell}\lambda - \frac{g}{\ell} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{-b}{2\ell} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{b}{\ell}\right)^2 + \frac{4g}{\ell}}$$

implicando que uma raiz da equação tem parte real positiva (sistema instável).

A Figura 8 mostra o plano de fase do modelo não linear (contínuo) e do modelo linearizado (tracejado) em torno do ponto $(0,0)$, para condição inicial $(\pi/3, 0)$. Note que o não linear tem atenuação maior do que o linear.

Exemplo – Pêndulo simples IV

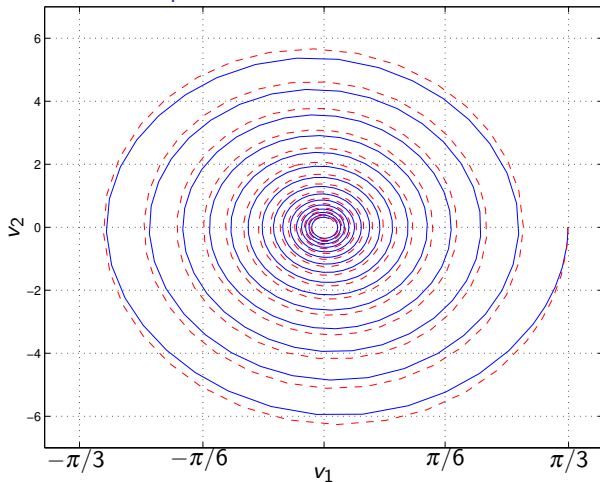


Figura: Planos de fase do pêndulo para a condição inicial $(\pi/3,0)$.

Exemplo – Van der Pol I

Exemplo 1.8 (Van der Pol)

Van der Pol estudou osciladores a válvula descritos pela seguinte equação

$$\ddot{y} - 2\mu(1 - y^2)\dot{y} + y = 0 \quad , \quad \mu > 0$$

Definindo

$$v_1 = y \quad , \quad v_2 = \dot{y}$$

tem-se

$$\dot{v}_1 = v_2 \quad , \quad \dot{v}_2 = -v_1 + 2\mu(1 - v_1^2)v_2$$

O ponto de equilíbrio é $(v_1, v_2) = (0, 0)$ e o jacobiano é dado por

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial v_j} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 4\mu v_1 v_2 & 2\mu(1 - v_1^2) \end{bmatrix}$$

Exemplo – Van der Pol II

O sistema linearizado é dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

resultando na equação de segunda ordem em v_2

$$(p^2 - 2\mu p + 1)v_2 = 0$$

Para $0 < \mu < 1$, têm-se as raízes da equação característica

$$\lambda_1 = \lambda_2^* = \mu + j\sqrt{1 - \mu^2}$$

tratando-se, portanto, de um sistema instável oscilatório. A solução $v_2(t)$ é dada por

$$v_2(t) = a \exp(\mu t) \cos((\sqrt{1 - \mu^2})t + \theta)$$

com a e θ definidos pelas condições iniciais.

Os planos de fase para $\mu = 0.5$ são mostrados na Figura 9. Observe que o sistema não-linear possui um ciclo-limite estável e que o modelo linearizado em torno do ponto de equilíbrio $(0,0)$ apresenta o caráter oscilatório instável da solução.

Exemplo – Van der Pol III

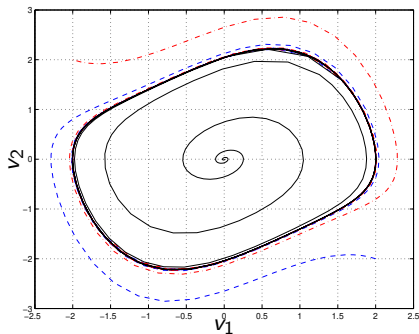


Figura: Planos de fase para as condições iniciais $(0.01, 0)$, $(-2, 2)$ e $(2, -2)$ do oscilador de Van der Pol.

Exemplo I

Exemplo 1.9

Considere a equação diferencial

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = x$$

Usando diferenciadores, pode-se implementar a equação como mostrado na Figura 10. Note que na entrada do diferenciador da esquerda, tem-se

$$y = x - 2\dot{y} - \ddot{y}$$

De maneira similar, a Figura 11 mostra uma implementação com integradores. Na entrada do integrador da esquerda, tem-se

$$\ddot{y} = x - 2\dot{y} - y$$

Exemplo II

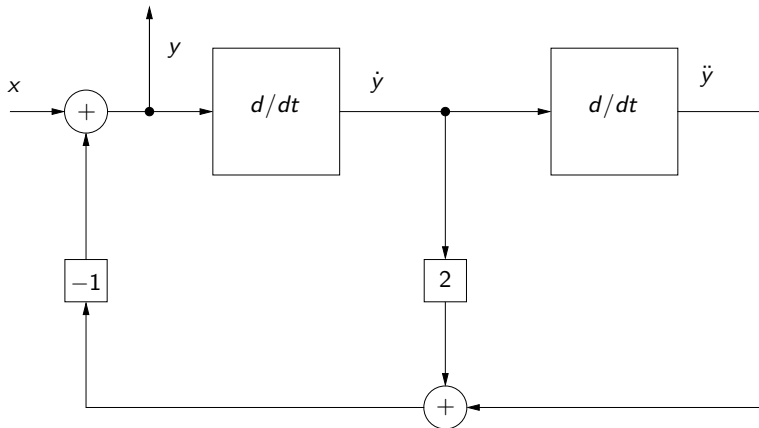


Figura: Implementação com diferenciadores de $\ddot{y} + 2\dot{y} + y = x$.

Exemplo III

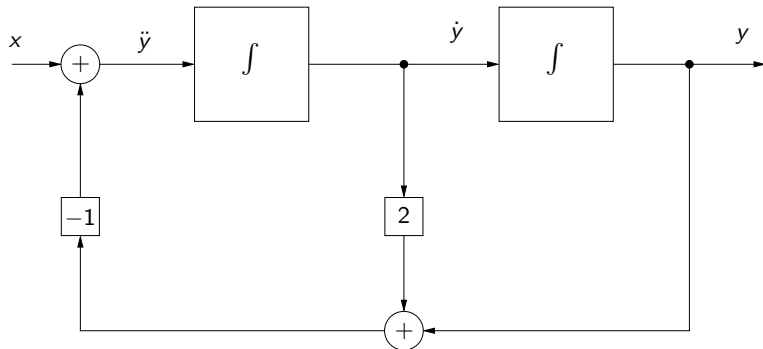


Figura: Implementação com integradores de $\ddot{y} + 2\dot{y} + y = x$.

Exemplo IV

Apesar de ambas as implementações representarem a mesma equação diferencial (mesma função de transferência), é preferível usar integradores pois diferenciadores amplificam ruídos de alta frequência.

A relação sinal-ruído é definida como

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = 20 \log |a/b|$$

sendo a a amplitude do sinal e b a amplitude do ruído.

Supondo um sinal $x(t)$ sujeito ao ruído aditivo de alta frequência $\eta(t)$, ambos senoidais, aplicados na entrada de um diferenciador, tem-se

$$x(t) + \eta(t) = \text{sen}(\omega_0 t) + \text{sen}(\omega t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = \omega_0 \cos(\omega_0 t) + \omega \cos(\omega t)$$

cujas relações sinal-ruído são

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{in} = 0 \text{ dB} \quad ; \quad \left(\frac{S}{N}\right)_{out} = 20 \log \omega_0/\omega$$

Exemplo V

implicando que a relação sinal-ruído da saída diminui com o aumento da frequência do ruído.

Por outro lado, na saída do integrador tem-se

$$y(t) = -\frac{1}{\omega_0} \cos(\omega_0 t) - \frac{1}{\omega} \cos(\omega t) \Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_{out} = 20 \log \omega / \omega_0$$

e portanto a relação sinal-ruído aumenta com a frequência.

Representação em variáveis de estado a partir da equação diferencial I

Algumas representações em variáveis de estado, ditas canônicas, podem ser obtidas por inspeção direta da equação diferencial.

Propriedade 2 (Caso $N(p) = \beta_0$ (sem a derivada da entrada))

Considere a equação diferencial

$$D(p)y(t) = \beta_0 x(t) \quad , \quad D(p) = \sum_{k=0}^m \alpha_k p^k$$

com $\alpha_m = 1$, α_k e β_0 coeficientes constantes. Definindo as variáveis de estado $v \in \mathbb{R}^m$

$$v_1 = y \quad , \quad v_2 = \dot{y} \quad , \quad \dots \quad , \quad v_m = y^{(m-1)}$$

tem-se

$$\dot{v}_m = y^{(m)} = - \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k v_{k+1} + \beta_0 x$$

Representação em variáveis de estado a partir da equação diferencial II

Em notação matricial,

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad y = cv + dx$$

com

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{m-1} \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta_0 \end{bmatrix} x$$

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0] v + [0] x$$

A matriz A acima está na forma denominada **companheira**. Note que, definindo-se novas variáveis de estado $v_k \leftarrow v_k/\beta_0$, tem-se a representação

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{m-1} \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

Representação em variáveis de estado a partir da equação diferencial III

$$y = [\beta_0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0] v + [0] x$$

Exemplo I

Exemplo 1.10

O circuito de terceira ordem do Exemplo 1.6 descrito pela equação diferencial

$$\left(p^3 + \left(\frac{R_1}{L} + \frac{1}{R_2 C_2} \right) p^2 + \left(\frac{1}{LC_1} + \frac{1}{LC_2} \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \right) p + \frac{1}{LC_1 R_2 C_2} \right) y = 0$$

pode ser representado pela equação de estado

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix} v$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{LC_1 R_2 C_2}, \quad \alpha_1 = \left(\frac{1}{LC_1} + \frac{1}{LC_2} \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \right), \quad \alpha_2 = \left(\frac{R_1}{L} + \frac{1}{R_2 C_2} \right)$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] v$$

sendo $v_1 = y$, $v_2 = \dot{y}$ e $v_3 = \ddot{y}$. Note que essa escolha produz uma representação por variáveis de estado sistemática e simples, diferente da obtida no Exemplo 1.6, e que

Exemplo II

ambas produzem a mesma equação diferencial em y . A Figura 12 mostra a implementação com integradores.

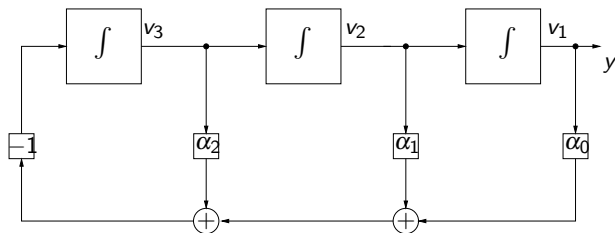


Figura: Implementação com integradores do circuito do Exemplo 1.5 (circuito de terceira ordem).

Exemplo 1.11

O circuito de segunda ordem do Exemplo 1.5 descrito pela equação diferencial

$$\left(p^2 + \frac{1}{RC}p + \frac{1}{LC}\right)y = \frac{1}{RLC}x$$

pode ser representado na forma de variáveis de estado por

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{RLC} \end{bmatrix} x$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} v$$

sendo $v_1 = y$ e $v_2 = \dot{y}$.

Propriedade 3 (Caso estritamente próprio — $N(p)$ no vetor de saída)

A equação diferencial (estritamente própria)

$$D(p)y(t) = N(p)x(t) \quad , \quad D(p) = \sum_{k=0}^m \alpha_k p^k \quad , \quad N(p) = \sum_{k=0}^{m-1} \beta_k p^k$$

com $\alpha_m = 1$ e demais coeficientes constantes pode ser representada pelas equações de estado

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad y = cv + dx$$

Considere a escolha de variáveis de estado $v \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$y = \sum_{k=0}^{m-1} \beta_k v_{k+1} \quad \Rightarrow \quad c = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_{m-1}] \quad , \quad d = 0$$

e

$$\dot{v}_1 = v_2, \dot{v}_2 = v_3, \dots, \dot{v}_{m-1} = v_m, \dot{v}_m = \xi$$

Portanto,

$$v_1 = p^{-m}\xi, v_2 = p^{-m+1}\xi, \dots, v_m = p^{-1}\xi$$

Substituindo as variáveis v na expressão de y , tem-se

$$y = \left(\sum_{k=0}^{m-1} \beta_k p^{k-m} \right) \xi$$

Da equação $D(p)y = N(p)x$, tem-se

$$y = \left(\sum_{k=0}^{m-1} \beta_k p^{k-m} \right) \frac{x}{\sum_{k=0}^m \alpha_k p^{k-m}}$$

Igualando as duas expressões, tem-se

$$\left(\sum_{k=0}^m \alpha_k p^{k-m} \right) \xi = x \quad \Rightarrow \quad \xi = \dot{v}_m = - \left(\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k v_{k+1} \right) + x$$

resultando em

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{m-1} \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x \quad (4)$$

$$y = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_{m-1}] v + [0] x \quad (5)$$

Exemplo I

Exemplo 1.12

Considere o sistema (estritamente próprio)

$$D(p)y = N(p)x \Rightarrow (p^3 + 2p^2 + 3p + 4)y = (p^2 + 2p - 1)x$$

Seja

$$y = \beta_0 v_1 + \beta_1 v_2 + \beta_2 v_3 = -v_1 + 2v_2 + v_3$$

e as variáveis de estado

$$\dot{v}_1 = v_2, \dot{v}_2 = v_3, \dot{v}_3 = \xi \Rightarrow v_1 = p^{-3}\xi, v_2 = p^{-2}\xi, v_3 = p^{-1}\xi$$

que resultam em

$$y = -v_1 + 2v_2 + v_3 = -p^{-3}\xi + 2p^{-2}\xi + p^{-1}\xi = (p^{-1} + 2p^{-2} - p^{-3})\xi$$

Exemplo II

Da equação $D(p)y = N(p)x$, tem-se

$$y = (p^{-1} + 2p^{-2} - p^{-3}) \frac{1}{(1 + 2p^{-1} + 3p^{-2} + 4p^{-3})} x$$

Portanto,

$$(1 + 2p^{-1} + 3p^{-2} + 4p^{-3})\xi = x \quad \Rightarrow \quad \xi = -2p^{-1}\xi - 3p^{-2}\xi - 4p^{-3}\xi + x$$

$$\xi = \dot{v}_3 = -4v_1 - 3v_2 - 2v_3 + x$$

resultando em (veja a representação com integradores na Figura 13)

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} v$$

Exemplo III

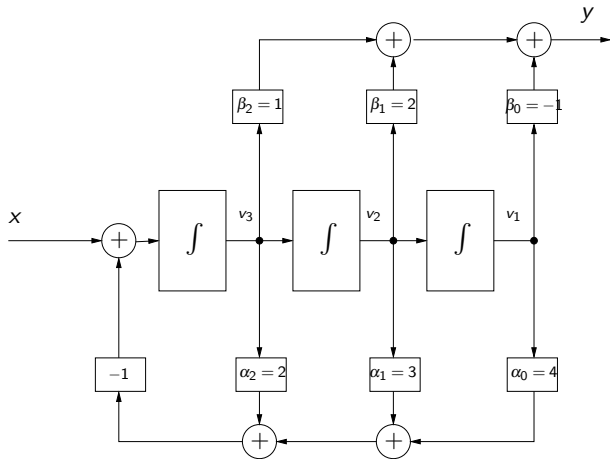


Figura: Realização do Exemplo 1.12 com $N(p)$ no vetor de saída.

Caso próprio — $N(p)$ no vetor de saída**Propriedade 4** (Caso próprio — $N(p)$ no vetor de saída)

No caso próprio (grau de $D(p)$ igual ao grau de $N(p)$), dividindo-se $N(p)/D(p)$ tem-se

$$N(p) = D(p)\beta_m + \bar{N}(p) \quad \Rightarrow \quad D(p)y = N(p)x = D(p)\beta_mx + \bar{N}(p)x$$

com

$$\bar{N}(p) = \sum_{k=0}^{m-1} \bar{\beta}_k p^k \quad , \quad \bar{\beta}_k = \beta_k - \beta_m \alpha_k$$

Definindo

$$y = y_1 + \beta_mx \quad \Rightarrow \quad D(p)y_1 = \bar{N}(p)x$$

tem-se um sistema estritamente próprio em y_1 . A matriz A e o vetor b são portanto idênticos ao caso estritamente próprio e o vetor c e d são dados por

$$c = [\bar{\beta}_0 \quad \bar{\beta}_1 \quad \bar{\beta}_2 \quad \cdots \quad \bar{\beta}_{m-1}] \quad , \quad d = [\beta_m]$$

Exemplo 1.13 (Circuito *RRLC*)

Considere o circuito descrito na Figura 14, cujas equações são

$$\frac{L}{R_2} \dot{v}_2 + v_2 = C \dot{v}_1 + \frac{1}{R_1} v_1 \quad , \quad x = L \dot{v}_2 + v_1 \quad , \quad y = \frac{L}{R_2} \dot{v}_2$$

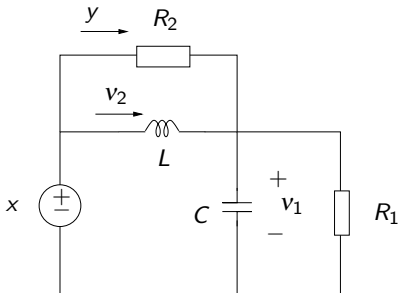


Figura: Circuito *RRLC*.

A equação diferencial em y é

$$D(p)y = N(p)x \quad , \quad D(p) = p^2 + \left(\frac{1}{R_1 C} + \frac{1}{R_2 C} \right) p + \frac{1}{LC} \quad , \quad N(p) = \frac{1}{R_2} p \left(p + \frac{1}{R_1 C} \right)$$

A divisão $N(p)/D(p)$ resulta em $\beta_2 = 1/R_2$ e

$$\bar{N}(p) = -\frac{1}{R_2^2 C} p - \frac{1}{R_2 LC}$$

A representação em equações de estado na forma companheira (note que as variáveis de estado v_1 e v_2 não mais correspondem à tensão no capacitor v_1 e à corrente no indutor v_2) é dada por

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\left(\frac{1}{R_1 C} + \frac{1}{R_2 C} \right) \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2 LC} & -\frac{1}{R_2^2 C} \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} x$$

Observe que $D(p)$ pode ser escrito como

$$D(p) = \left(p + \frac{1}{R_1 C}\right) \left(p + \frac{1}{R_2 C}\right) + \left(\frac{1}{LC} - \frac{1}{R_1 R_2 C^2}\right) \left(\frac{1}{p + \frac{1}{R_1 C}}\right)$$

Se as constantes de tempo associadas às malhas do circuito forem iguais, isto é, se

$$\frac{L}{R_2} = R_1 C$$

tem-se

$$D(p) = \left(p + \frac{1}{R_1 C}\right) \left(p + \frac{1}{R_2 C}\right)$$

e a equação diferencial em y (de primeira ordem) é dada por

$$\left(p + \frac{1}{R_2 C}\right) y = \frac{1}{R_2} p x$$

Considerando $R_1 = R_2 = C = L = 1$, tem-se

$$\dot{v} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}}_{\begin{matrix} -\alpha_0 & -\alpha_1 \end{matrix}} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x, \quad y = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}}_{\begin{matrix} -\bar{\beta}_0 & -\bar{\beta}_1 \end{matrix}} v + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}}_{\beta_2} x$$

e a equação diferencial

$$(\rho^2 + 2\rho + 1)y = ((\rho^2 + 2\rho + 1)1 - (\rho + 1))x = \rho(\rho + 1)x$$

Exemplo

Exemplo 1.14

Considere um sistema próprio descrito pela equação diferencial

$$(p^2 + 2p + 1)y = (p^2 + 1)x = ((p^2 + 2p + 1) - 2p)x$$

Portanto,

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 2, \bar{\beta}_0 = 0, \bar{\beta}_1 = -2, \beta_2 = 1$$

resultando em

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & -2 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} x$$

Propriedade 5 (Equação diferencial a partir da representação de estado (sistema SISO))

Utilizando o operador p , a saída y do sistema SISO descrito na forma de representação de estado

$$\dot{v} = Av + bx$$

$$y = cv + dx$$

é dada por

$$y = (c(pI - A)^{-1}b + d)x = \frac{N(p)}{D(p)}x$$

Note que trata-se de uma equação diferencial de ordem m , pois $\det(pI - A)$ é um polinômio de ordem m em p . Eventualmente, a equação diferencial pode ter ordem menor do que m se houver cancelamentos entre zeros e polos.

O sistema é estritamente próprio se $d = 0$ e próprio para $d \neq 0$. Portanto, não é possível descrever na forma de variáveis de estado sistemas com grau de $N(p)$ maior do que o grau de $D(p)$.

Exemplo 1.15

Considere o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & -2 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} x$$

$$(pI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} p & -1 \\ 1 & p+2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{p(p+2)+1} \begin{bmatrix} p+2 & 1 \\ -1 & p \end{bmatrix}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \frac{N(p)}{D(p)} &= c(pI - A)^{-1}b + d = \begin{bmatrix} 0 & -2 \end{bmatrix} \frac{1}{p^2 + 2p + 1} \begin{bmatrix} p+2 & 1 \\ -1 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 = \\ &= \frac{-2p}{p^2 + 2p + 1} + 1 = \frac{p^2 + 1}{p^2 + 2p + 1} \end{aligned}$$

Exemplo 1.16

Considere novamente o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & -2 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} x$$

Utilizando o operador p , obtém-se um sistema linear de 3 equações a 3 incógnitas v_1 , v_2 e y :

$$pv_1 = v_2$$

$$pv_2 = -v_1 - 2v_2 + x$$

$$y = -2v_2 + x$$

Eliminando v_1 , tem-se

$$\begin{aligned}(p^2 + 2p + 1)v_2 &= px \\ y &= -2v_2 + x\end{aligned}$$

Eliminando v_2 , obtém-se

$$y = -2 \frac{px}{p^2 + 2p + 1} + x$$

que resulta na equação diferencial

$$(p^2 + 2p + 1)y = (p^2 + 1)x$$

Propriedade 6 (Caso estritamente próprio — $N(p)$ no vetor de entrada)

Outras representações matriciais podem ser obtidas com escolhas diferentes das variáveis de estado.

Considere a equação diferencial

$$(p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0)y = (\beta_2 p^2 + \beta_1 p + \beta_0)x$$

Definindo as variáveis de estado

$$pv_1 = -\alpha_0 v_3 + \beta_0 x$$

$$pv_2 = v_1 - \alpha_1 v_3 + \beta_1 x$$

$$pv_3 = v_2 - \alpha_2 v_3 + \beta_2 x$$

verifica-se que v_3 satisfaz a equação diferencial satisfeita por y , ou seja, $v_3 = y$, pois

$$p^2 v_3 = (v_1 - \alpha_1 v_3 + \beta_1 x) - \alpha_2 p v_3 + \beta_2 p x$$

$$p^3 v_3 = (-\alpha_0 v_3 + \beta_0 x) - \alpha_1 p v_3 + \beta_1 p x - \alpha_2 p^2 v_3 + \beta_2 p^2 x$$

$$\Rightarrow (p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0) v_3 = (\beta_2 p^2 + \beta_1 p + \beta_0) x$$

Dessa forma, a representação matricial (veja a implementação na Figura 15) é dada por

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & -\alpha_2 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} x$$
$$y = [0 \quad 0 \quad 1] v$$

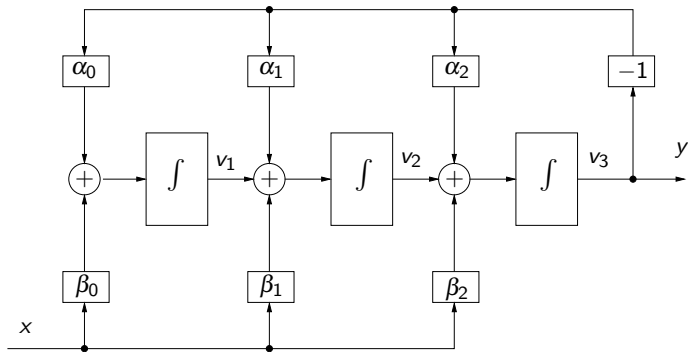


Figura: Realização com $N(p)$ no vetor de entrada.

Generalizando, tem-se

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{m-1} \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{m-1} \end{bmatrix} x \quad (6)$$

$$y = [0 \quad \cdots \quad 1] v + [0] x \quad (7)$$

Propriedade 7 (Representação dual)

A representação de estado (A, b, c, d) produz a mesma equação diferencial que a representação dual de estado (A', c', b', d) , pois

$$\frac{N(p)}{D(p)} = (c(pI - A)^{-1}b + d)' = (b'(pI - A')^{-1}c' + d)$$

Note que a representação (6)-(7) é dual da representação (4)-(5).

Exemplo de dualidade

Exemplo 1.17

A representação de estado

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x \quad , \quad y = [-1 \quad -1] v + [1] x$$

e sua representação dual

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} x \quad , \quad y = [0 \quad 1] v + [1] x$$

resultam na mesma equação diferencial

$$(p^2 + 2p + 1)y = p(p + 1)x$$

Propriedade 8 (Invariância com transformações lineares)

Transformações lineares biunívocas de variáveis de estado, na forma

$$\hat{v} = Tv$$

com T não singular, não alteram a equação diferencial do sistema, pois

$$v = T^{-1}\hat{v} \Rightarrow \dot{\hat{v}} = TAT^{-1}\hat{v} + Tbx, \quad y = cT^{-1}\hat{v} + dx$$

$$\begin{aligned} cT^{-1}(pI - TAT^{-1})^{-1}Tb + d &= cT^{-1}(pTT^{-1} - TAT^{-1})^{-1}Tb + d = \\ &= cT^{-1}(T(pI - A)T^{-1})^{-1}Tb + d = cT^{-1}T(pI - A)^{-1}T^{-1}Tb + d \\ &= c(pI - A)^{-1}b + d = \frac{N(p)}{D(p)} \end{aligned}$$