Livro (e-book): Linearidade em Sinais e Sistemas, Ivanil S. Bonatti, Amauri Lopes, Pedro L. D. Peres, Cristiano M. Agulhari,

Ed. Blucher, SP, 2015, 1ed., ISBN: 9788521208921.

Prof. Pedro L. D. Peres

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

Resposta em Frequência

Sistemas contínuos relacionam entradas e saídas que são funções contínuas no tempo e, se satisfazem o princípio da superposição, são sistemas lineares.

Notação: $y(t) = \mathscr{G}\{x(t)\}$, sendo $x(t)$ a entrada e $y(t)$ a saída.

Um sistema linear invariante no tempo, isto é,

$$\mathscr{G}\{x(t-a)\} = y(t-a)$$

satisfaz o teorema da convolução

$$y(t) = \mathscr{G}\{x(t)\} = h(t) * x(t) \quad , \quad h(t) = \mathscr{G}\{\delta(t)\}$$

e possui como auto-função a entrada

$$x(t) = \exp(st) \quad \Rightarrow \quad y(t) = H(s)\exp(st)$$

sendo $H(s)$ a transformada bilateral de Laplace da função $h(t)$, dada por

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\beta)\exp(-s\beta)d\beta = \mathscr{L}\{h(t)\}$$

O domínio Ω_h é o conjunto dos valores de s complexos para os quais a integral é finita.

A função $H(s)$ é também denominada função de transferência do sistema, pois estabelece uma relação entre a transformada de Laplace da entrada e a da saída

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

Para $H(s)$ racional, as raízes do denominador de $H(s)$ são denominadas polos e as raízes do numerador são denominadas zeros.

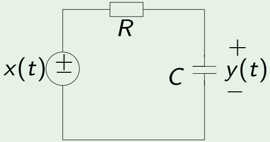
O cômputo de $H(s)$ para $s = j\omega$ denomina-se resposta em frequência do sistema, escrita na forma

$$H(j\omega) = M(\omega)\exp(j\phi(\omega))$$

sendo $M(\omega)$ o módulo e $\phi(\omega)$ a fase de $H(j\omega)$

Exemplo – Circuito *RC*

Exemplo 1.1 (Circuito *RC*)



A entrada é a fonte de tensão $x(t)$ e a saída $y(t)$ é a tensão no capacitor. O circuito é descrito pela equação

$$\dot{y} + \frac{1}{\tau}y = \frac{1}{\tau}x \quad ; \quad \tau = RC$$

ou, usando o operador $p = \dfrac{d}{dt}$,

$$\left(p + \frac{1}{\tau}\right)y = \frac{1}{\tau}x$$

A função de transferência é dada por

$$H(s) = \frac{1}{\tau s + 1} = \frac{1/\tau}{s + 1/\tau}$$

Exemplo – Circuito RC

Note que esta função de transferência é a transformada de Laplace de

$$h(t) = \frac{1}{\tau}\exp(-t/\tau)u(t)$$

A resposta em frequência é obtida fazendo-se $s = j\omega$, resultando em

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau} = M(\omega)\exp(j\phi(\omega))$$

$$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}} \quad ; \quad \phi(\omega) = -\arctan(\tau\omega)$$

As figuras 1 e 2 mostram respectivamente o módulo e a fase da resposta em frequência para $RC = 1$.

Exemplo – Circuito RC

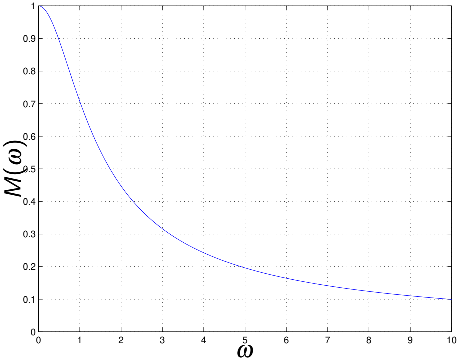


Figura: Módulo da resposta em frequência do circuito RC do Exemplo 1.1 com $RC = 1$.

Exemplo – Circuito RC

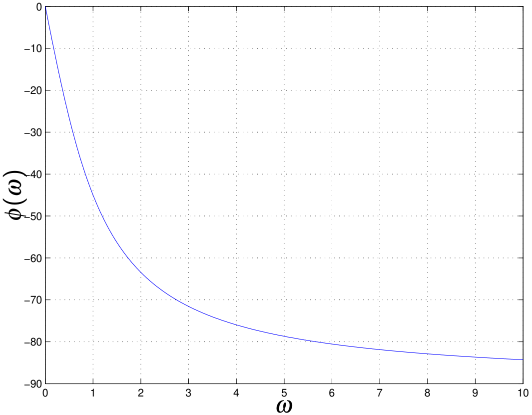


Figura: Fase da resposta em frequência do circuito RC do Exemplo 1.1 com $RC = 1$.

Exemplo – Circuito *RC*

Note que trata-se de um filtro passa-baixas, com a fase variando de 0 a -90 graus quando a frequência varia de zero a infinito e $\phi(1/\tau) = -45$ graus. O filtro *RC* possui um polo em $s = -1/\tau$.

O módulo varia de 1 (frequência $\omega = 0$) a 0 (para frequência $\omega \to +\infty$), passando por $\sqrt{2}/2$ na frequência $1/\tau$.

Diagramas assintóticos de Bode

Utilizando uma escala logarítmica para a frequência ω, os gráficos de módulo (em logaritmo) e fase (em graus ou radianos) da resposta em frequência de um sistema linear podem ser desenhados de maneira aproximada por retas (assíntotas).

Definição 1 (Decibéis (dB))

$$M_{dB}(\omega) = 20 \log M(\omega)$$

sendo log *o logaritmo na base* 10.

A definição de dB (decibéis) é, classicamente, 10 vezes o logaritmo da relação. O fator 20 é devido à interpretação de que a potência é proporcional ao quadrado da tensão.

As assíntotas são definidas para baixa frequência e para alta frequência. A frequência na qual ocorre o encontro das assíntotas é denominada frequência de corte ω_c.

Exemplo 1.2 (Polo real negativo)

Considere, com $\omega_c > 0$, a função de transferência

$$H(s) = \frac{\omega_c}{s+\omega_c}$$

A resposta em frequência é dada por

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega/\omega_c} \ , \ M(\omega) = (1+(\omega/\omega_c)^2)^{-0.5}$$

$$M_{\text{dB}}(\omega) = 20\log M(\omega) = -10\log\left(1+(\omega/\omega_c)^2\right)$$

Note que no Exemplo do circuito RC, tem-se $\omega_c = 1/\tau$.

As assíntotas são definidas para $\omega \ll \omega_c$ (baixa frequência) e para $\omega \gg \omega_c$ (alta frequência). No exemplo, tem-se $M_{\text{dB}} \approx 0$ para baixas frequências e $M_{\text{dB}} \approx -20\log\omega + 20\log\omega_c$ para altas frequências, correspondendo a uma queda de 20 dB por década (aproximadamente 6 dB por oitava. O termo oitava, que corresponde ao dobro da frequência, deriva do fato de que, nos pianos, a cada oito teclas dobra-se a frequência).

O encontro das assíntotas ocorre em ω_c (frequência de corte). Na frequência de corte tem-se $M_{\text{dB}} = -10\log 2 \approx -3$ dB.

A fase $\phi(\omega)$ é dada por

$$\phi(\omega) = -\arctan(\omega/\omega_c)$$

que vai de 0 a -90 graus, com $\phi(\omega_c) = -45$ graus. As assíntotas são 0 para frequências abaixo de uma década da frequência de corte ω_c, -90 graus para frequências acima de uma década de ω_c e a reta unindo as duas assíntotas em $0.1\omega_c$ e $10\omega_c$.

As figuras 3 e 4 mostram os diagramas de Bode do sistema para $\omega_c = 1$.

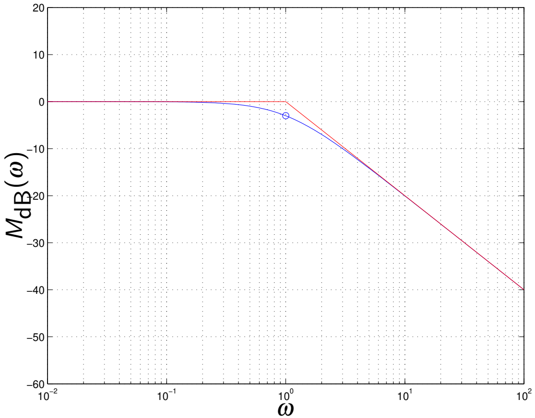


Figura: Módulo (em dB) da resposta em frequência (escala logarítmica) do Exemplo 1.2 com $\omega_c = 1$.

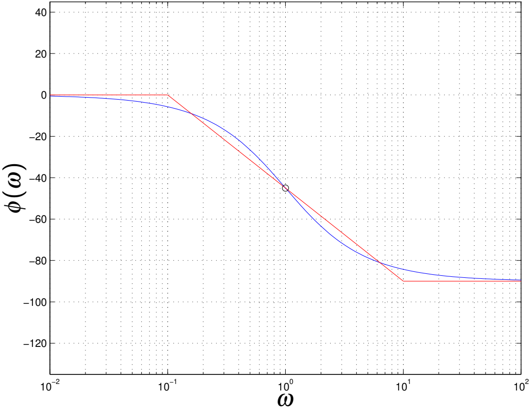


Figura: Fase da resposta em frequência (escala logarítmica) do Exemplo 1.2 com $\omega_c = 1$.

Medidas experimentais da resposta em frequência permitem obter a frequência de corte e com isso identificar um modelo de primeira ordem para o sistema.

Propriedade 1

Considere

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) \quad \Rightarrow \quad H(j\omega) = M_1(\omega)M_2(\omega)\exp\Big(j\phi_1(\omega) + j\phi_2(\omega)\Big)$$

Então,

$$M_{dB}(\omega) = M_{1dB}(\omega) + M_{2dB}(\omega) \quad ; \quad \phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega)$$

pois o módulo do produto é o produto dos módulos (soma em logaritmo) e o produto de exponenciais é a exponencial da soma dos argumentos.

Exemplo – Ganho constante positivo

Exemplo 1.3 (Ganho constante positivo)

Considere $H(s) = k > 0$ constante real.
Portanto,

$$M_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log k \quad ; \quad \phi(\omega) = 0$$

Exemplo 1.4 (Ganho constante negativo)

Considere $H(s) = -k$, $k > 0$ constante.
Portanto,

$$H(s) = k \exp(j\pi) \quad \Rightarrow \quad M_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log k \quad ; \quad \phi(\omega) = 180 \text{ graus}$$

Exemplo – Zero na origem

Exemplo 1.5 (Zero na origem)

Considere, para $k > 0$,

$$H(s) = ks$$

Portanto,

$$M_{\text{dB}}(\omega) = 20\log\omega + 20\log k \quad ; \quad \phi(\omega) = 90 \text{ graus}$$

Observe que $M_{\text{dB}}(\omega)$ é uma reta que cruza o ponto 0 dB em $\omega = 1/k$.

Exemplo – Polo na origem

Exemplo 1.6 (Polo na origem)

Considere, para $k > 0$,

$$H(s) = \frac{k}{s}$$

Portanto,

$$M_{\text{dB}}(\omega) = -20\log\omega + 20\log k \quad ; \quad \phi(\omega) = -90 \text{ graus}$$

Observe que $M_{\text{dB}}(\omega)$ é uma reta que cruza o ponto 0 dB em $\omega = k$.

Exemplo – Zero de ordem m na origem

Exemplo 1.7 (Zero de ordem m na origem)

Considere $H(s) = s^m$, com $m \in \mathbb{Z}_+$.
Portanto,

$$M_{\text{dB}}(\omega) = 20m\log\omega \quad ; \quad \phi(\omega) = m90 \text{ graus}$$

Exemplo 1.8 (Polo de ordem m na origem)

Considere $H(s) = \dfrac{1}{s^m}$, com $m \in \mathbb{Z}_+$.
Portanto,

$$M_{\text{dB}}(\omega) = -20m\log\omega \quad ; \quad \phi(\omega) = -m90 \text{ graus}$$

Exemplo – Zero real negativo

Exemplo 1.9 (Zero real negativo)

Considere, com $\omega_c > 0$, a função de transferência

$$H(s) = \frac{s}{\omega_c} + 1$$

Portanto,

$$M(\omega) = \sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2} \quad ; \quad \phi(\omega) = \arctan(\omega/\omega_c) \text{ graus}$$

As assíntotas do módulo são $M_{\text{dB}} \approx 0$ para baixas frequências e $M_{\text{dB}} \approx 20\log\omega - 20\log\omega_c$ para altas frequências. Na frequência de corte ω_c, tem-se $M_{\text{dB}} = 10\log 2 \approx 3$ dB.

As assíntotas da fase são 0 para frequências abaixo de uma década da frequência de corte ω_c, 90 graus para frequências acima de uma década de ω_c e a reta unindo as duas assíntotas em $0.1\omega_c$ e $10\omega_c$.

Sistemas de fase mínima

Definição 2 (Sistemas de fase mínima)

São sistemas que possuem polos e zeros com parte real negativa. O termo "de fase mínima" vem do fato de que, por exemplo, $s+1$ *e* $s-1$ *possuem o mesmo diagrama de módulo, porém o diagrama de fase mais próximo de* 0 *grau é o do zero com parte real negativa.*

Exemplo 1.10 (Zero real positivo)

Considere, com $\omega_c > 0$, a função de transferência

$$H(s) = \frac{s}{\omega_c} - 1$$

A resposta em frequência é dada por

$$M(\omega) = \sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2} \quad ; \quad \phi(\omega) = 180 - \arctan(\omega/\omega_c) \text{ graus}$$

As assíntotas do módulo são $M_{\text{dB}} \approx 0$ para baixas frequências e $M_{\text{dB}} \approx 20\log\omega - 20\log\omega_c$ para altas frequências. Na frequência de corte ω_c, tem-se $M_{\text{dB}} = 10\log 2 \approx 3$ dB.

As assíntotas da fase são 180 para frequências abaixo de uma década da frequência de corte ω_c, 90 graus para frequências acima de uma década de ω_c e a reta de inclinação negativa unindo as duas assíntotas em $0.1\omega_c$ e $10\omega_c$.

Observe que a resposta em frequência do sistema com zero real positivo distingüe-se da resposta do sistema com zero real negativo apenas pela fase. Um sistema que possui um zero com parte real positiva é chamado de sistema de fase não-mínima.

Exemplo

Exemplo 1.11

Considere a função de transferência

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{\ell} \beta_k s^k}{\sum_{k=0}^{m} \alpha_k s^k}$$

com $\alpha_m = 1$, $\alpha_0 \neq 0$ e $m > \ell$.

A assíntota de baixa frequência ($s = j\omega$, $\omega \to 0$), é

$$M_{\text{dB}} \approx 20 \log \frac{\beta_0}{\alpha_0}$$

e a assíntota de alta frequência ($\omega \to +\infty$) é

$$M_{\text{dB}} \approx 20 \log \beta_\ell \omega^{(\ell - m)} = -20(m - \ell) \log \omega + 20 \log \beta_\ell$$

Portanto, a frequência de corte é dada por

$$\beta_\ell \omega_c^{(\ell - m)} = \frac{\beta_0}{\alpha_0} \quad \Rightarrow \quad \omega_c = \left(\frac{\alpha_0 \beta_\ell}{\beta_0} \right)^{1/(m-\ell)}$$

No exemplo do circuito RC, tem-se $m = 1$, $\ell = 0$, $\beta_0 = \beta_\ell = 1/\tau$ e $\alpha_0 = 1/\tau$, resultando em $\omega_c = 1/\tau$.

As assíntotas de fase de baixas e altas frequências são, respectivamente,

$$\phi(\omega) \approx 0 \quad ; \quad \phi(\omega) \approx -(m - \ell)90 \text{ graus}$$

Entre $0.1\omega_c$ e $10\omega_c$, as assíntotas são unidas por uma reta.

Exemplo – Circuito RC em cascata

Exemplo 1.12 (Circuito RC em cascata)

Considere o circuito da Figura 5, com $\tau_1 = R_1 C_1 = 1$ e $\tau_2 = R_2 C_2 = 0.01$.

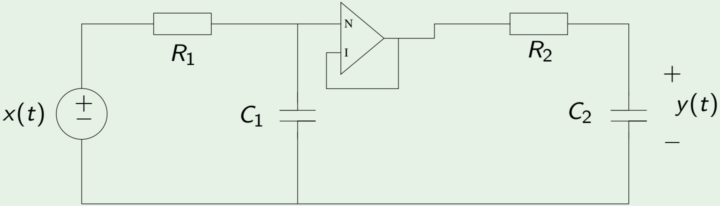


Figura: Circuito RC em cascata do Exemplo 1.12.

A função de transferência é dada por

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = H_1(s)H_2(s) = \left(\frac{1/\tau_1}{s+1/\tau_1}\right)\left(\frac{1/\tau_2}{s+1/\tau_2}\right) = \frac{100}{s^2+101s+100}$$

e, portanto, $\ell = 0$, $\beta_0 = \beta_\ell = 100$, $m = 2$ e $\alpha_0 = 100$, resultando em $\omega_c = 10$. As assíntotas de baixas e altas frequências são, respectivamente,

$$M_{\text{dB}} \approx 0 \quad ; \quad M_{\text{dB}} \approx 20\log\frac{100}{\omega^2} = -40\log\omega + 40$$

A aproximação por assíntotas pode ser melhorada considerando $H(s) = H_1(s)H_2(s)$ com

$$H(s) = \frac{100}{s^2+101s+100} = \left(\frac{1}{s+1}\right)\left(\frac{100}{s+100}\right)$$

e somando as assíntotas. A Figura 6 mostra as assíntotas do módulo dos dois sistemas de primeira ordem, a soma, as assíntotas do sistema de segunda ordem e $M(\omega)$ (em dB) versus $\omega \in [10^{-2}, 10^4]$ (em escala logarítmica).

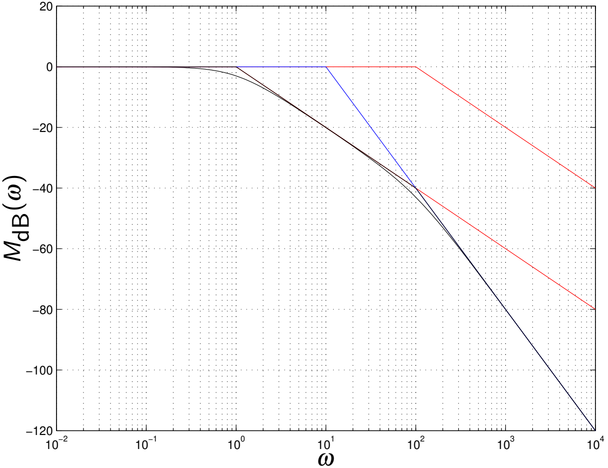


Figura: Módulo da resposta em frequência do circuito do Exemplo 1.12.

A primeira aproximação para a fase é dada pelas assíntotas

$$\phi(\omega) \approx 0 \quad ; \quad \phi(\omega) \approx -180 \text{ graus}$$

ligadas de $0.1\omega_c = 1$ a $10\omega_c = 100$ por uma reta.

Considerando dois sistemas de primeira ordem em cascata, tem-se as assíntotas

$$\phi_1(\omega) \approx 0 \quad ; \quad \phi_1(\omega) \approx -90 \text{ graus}$$

ligadas de 0.1 a 10 por uma reta somadas com

$$\phi_2(\omega) \approx 0 \quad ; \quad \phi_2(\omega) \approx -90 \text{ graus}$$

ligadas de 10 a 1000 por uma reta. As aproximações e o cômputo feito usando Matlab para a fase são mostrados na Figura 7.

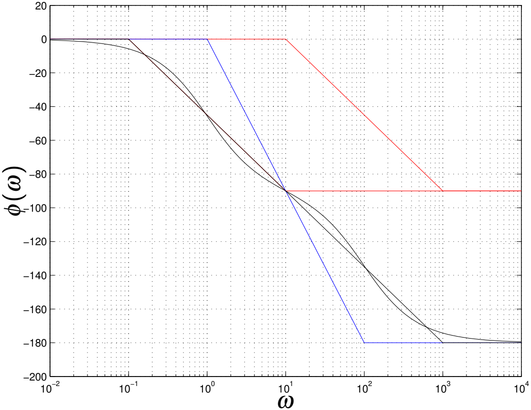


Figura: Fase da resposta em frequência do circuito do Exemplo 1.12.

Sistemas lineares com polos e zeros reais podem ser tratados como um conjunto de sistemas de primeira ordem em cascata.

Exemplo – Circuito passa-alta

Exemplo 1.13 (Circuito passa-alta)

Considere o circuito RC com a saída $y(t)$ igual à tensão no resistor, cuja equação diferencial é

$$(\tau p+1)y(t)=\tau px(t) \quad \Rightarrow \quad H(s)=\tau s\frac{1/\tau}{s+1/\tau}$$

As assíntotas de módulo são mostradas na Figura 8 e as de fase na Figura 9 para $\tau=0.1$.

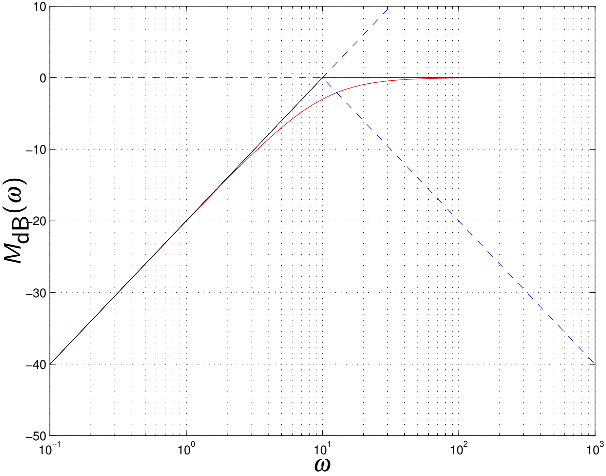


Figura: Módulo da resposta em frequência do circuito *RC* passa-alta do Exemplo 1.13.

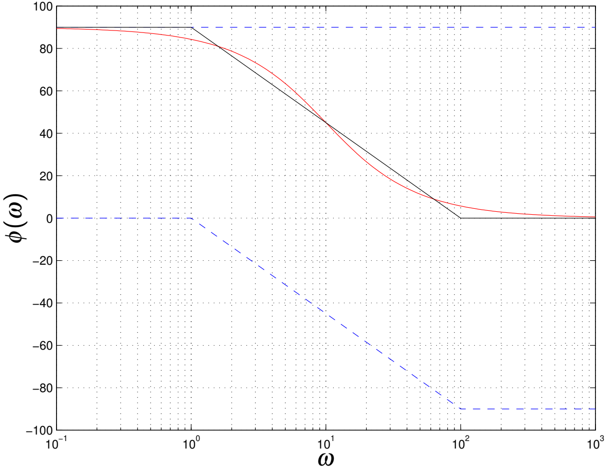


Figura: Fase da resposta em frequência do circuito *RC* passa-alta do Exemplo 1.13.

Exemplo – Polos e zeros reais

Exemplo 1.14 (Polos e zeros reais)

Considere o sistema descrito pela função de transferência

$$H(s) = \frac{10(s+100)}{(s+1)(s+1000)} = \left(\frac{1}{s+1}\right)\left(\frac{s}{100}+1\right)\left(\frac{1}{s/1000+1}\right)$$

As assíntotas do módulo e $M(\omega)$ são mostrados na Figura 10, e as assíntotas da fase e $\phi(\omega)$ na Figura 11.

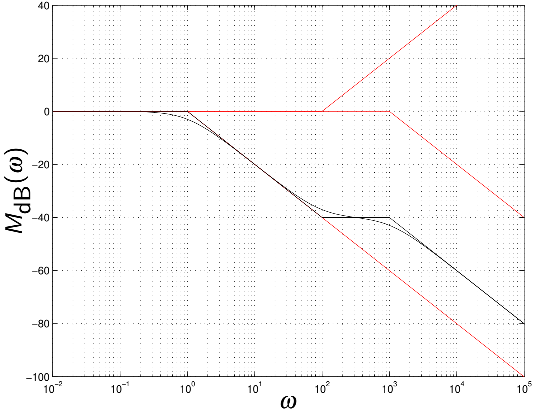


Figura: Módulo da resposta em frequência do Exemplo 1.14.

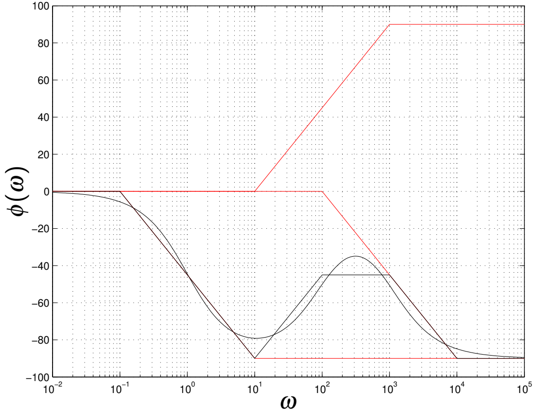


Figura: Fase da resposta em frequência do Exemplo 1.14.

Em sistemas lineares, polos e zeros complexos aparecem sempre em pares conjugados, justificando o tratamento de módulos de sistemas de segunda ordem com raízes complexas conjugadas.

Exemplo 1.15 (Polos complexos: sistemas de segunda ordem subamortecidos)

Considere a função de transferência de segunda ordem com raízes complexas λ_1 e $\lambda_2 = \lambda_1^*$ dada por

$$H(s) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \ , \ 0 \leq \xi < 1$$

com

$$\omega_n^2 = \lambda_1 \lambda_2 \quad ; \quad 2\xi\omega_n = -(\lambda_1 + \lambda_2)$$

As assíntotas de módulo de baixas e altas frequências são, respectivamente,

$$M_{\text{dB}}(\omega) \approx 0 \quad ; \quad M_{\text{dB}}(\omega) \approx -40\log\omega + 40\log\omega_n$$

e, portanto, a frequência de corte é $\omega_c = \omega_n$.
As assíntotas de fase de baixas e altas frequências são, respectivamente,

$$\phi(\omega) \approx 0 \quad ; \quad \phi(\omega) \approx -180 \text{ graus}$$

As figuras 12 e 13 mostram o diagrama de Bode para $\xi = 0.1$ e $\xi = 0.9$.

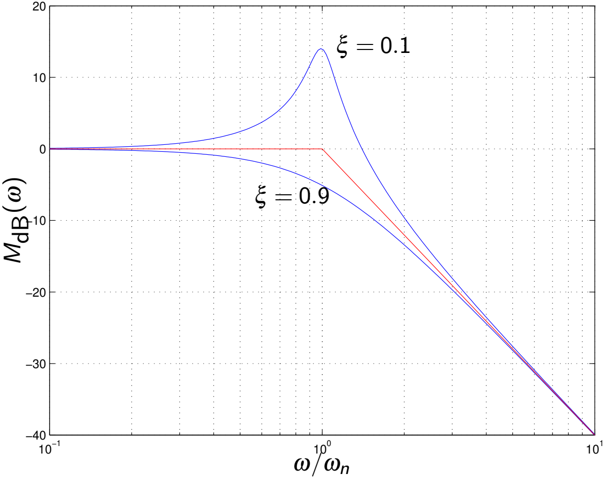


Figura: Módulo da resposta em frequência do Exemplo 1.15 para $\xi = 0.1$ e $\xi = 0.9$.

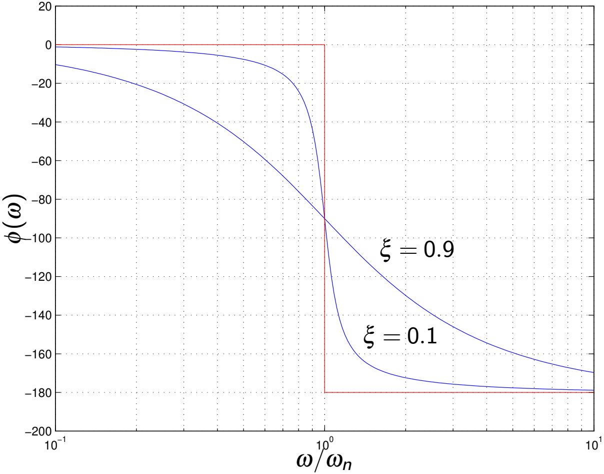


Figura: Fase da resposta em frequência do Exemplo 1.15 para $\xi = 0.1$ e $\xi = 0.9$.

Note que a influência do ξ é determinante na transição de uma assíntota à outra. As raízes, computadas em função de ξ e ω_n, são dadas por

$$\lambda_2^* = \lambda_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

As raízes são complexas conjugadas com parte real negativa para $0 < \xi < 1$. Para $\xi \to 1$, as assíntotas de fase poderiam ser unidas por uma reta passando pelos pontos $0.1\omega_n$ e $10\omega_n$. A aproximação mais utilizada considera a transição abrupta de 0 a -180 graus na frequência de corte $\omega_c = \omega_n$. Note que, para $\omega = \omega_n$, a fase é igual a -90 graus.

A ocorrência ou não do pico de $M(\omega)$ depende do parâmetro ξ.

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + j2\xi\omega_n\omega} \quad \Rightarrow \quad M^2(\omega) = \frac{\omega_n^4}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2\omega^2}$$

O máximo de $M(\omega)$ ocorre na frequência ω_r na qual o denominador passa por um mínimo. Derivando e igualando a zero, tem-se

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \quad ; \quad M(\omega_r) = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

Note que o pico no diagrama de módulo existe apenas para $\xi < 1/\sqrt{2} \approx 0.707$. Para valores de ξ tendendo a zero, $M(\omega_r)$ tende a infinito. Note também no entanto que, no domínio do tempo, a resposta ao degrau apresenta sobresinal para valores de ξ entre 0 e 1, pois o sobresinal está associado às raízes complexas.

Por meio de medidas experimentais de resposta em frequência é possível determinar os valores de ω_r e $M(\omega_r)$ e com isso identificar os parâmetros ξ e ω_n do sistema de segunda ordem. Observe ainda que, neste caso, $M(0) = 1$ (0 dB).

Exemplo 1.16 (Medidas experimentais)

Considere as medidas experimentais da resposta em frequência de um sistema suposto de segunda ordem, mostradas nas figuras 14 e 15.

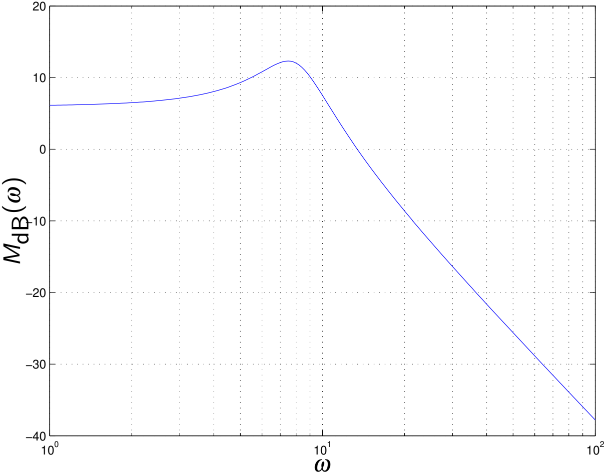


Figura: Módulo da resposta em frequência do Exemplo 1.16.

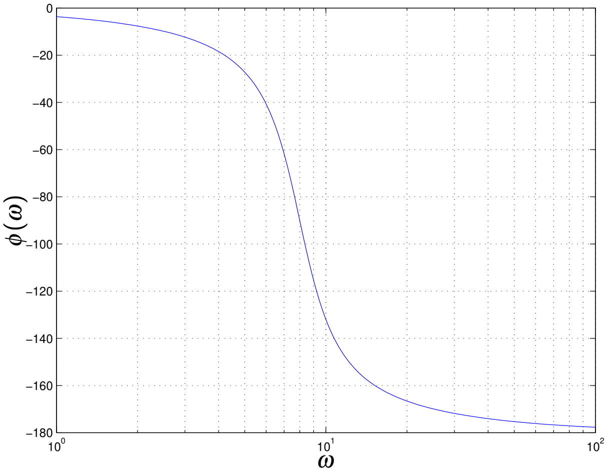


Figura: Fase da resposta em frequência do Exemplo 1.16.

Por inspeção do módulo, observa-se que o sistema é subamortecido. Observe também que a assíntota de alta frequência diminui 40 dB por década, confirmando as características de um sistema de segunda ordem com um par de polos complexos conjugados e nenhum zero. Essa característica é confirmada pela resposta de fase, que vai de 0 a -180 graus.

Do diagrama de módulo, obtém-se o ganho DC (ganho para baixas frequências) de 6 dB (aproximadamente igual a 2). O pico atinge 12 dB, implicando em um ganho de 6 dB em relação ao ganho DC, isto é, duas vezes o ganho DC.

Da equação

$$M(\omega_r) = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

obtém-se $\xi \approx 0.26$.

Do diagrama de fase, obtém-se o valor $\omega_n = 8$, frequência na qual a fase é -90 graus.

A função de transferência do sistema é dada por

$$H(s) = 2\frac{64}{s^2 + 4.16s + 64}$$

Exemplo

Exemplo 1.17

Considere

$$H(s) = \frac{s^2 + 10s + 100}{(s+1)(s+100)} = \frac{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}{(s+1)(s+100)} \quad , \quad \xi = 0.5, \omega_n = 10$$

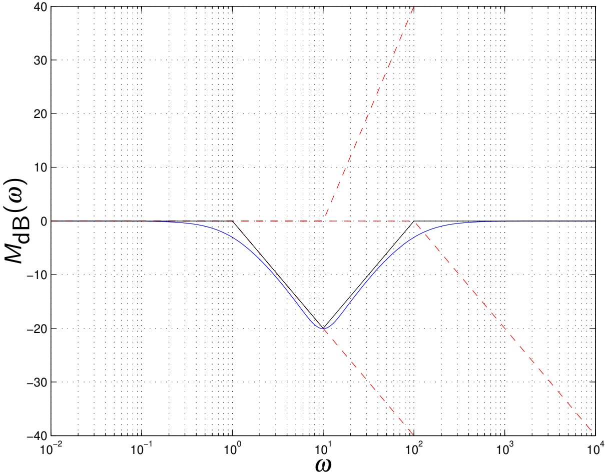


Figura: Módulo da resposta em frequência do Exemplo 1.17.

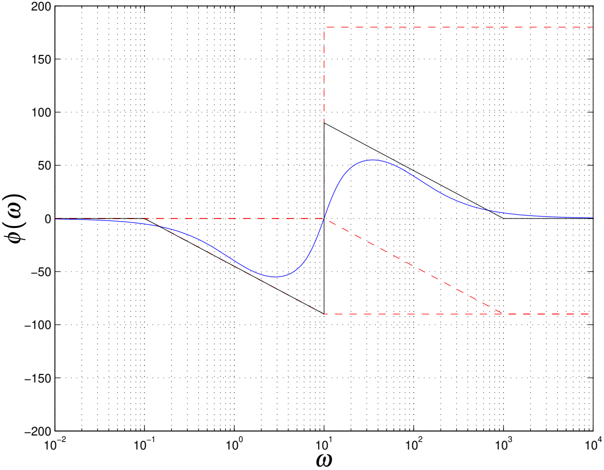


Figura: Fase da resposta em frequência do Exemplo 1.17.

Exemplo 1.18 (Compensador avanço ou *lead*)

Considere o diagrama assintótico de módulo de um sistema de fase mínima mostrado na Figura 18.

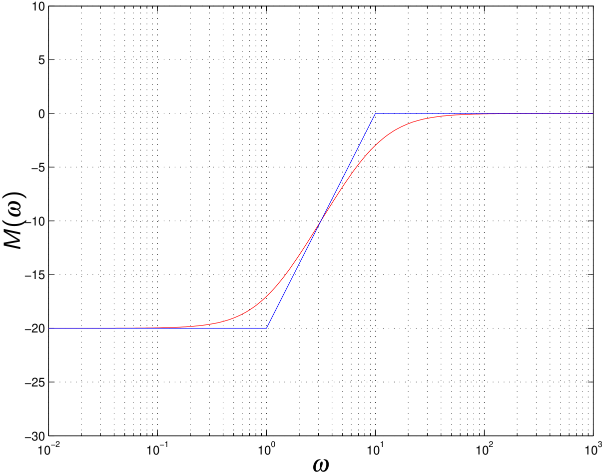


Figura: Diagrama de módulo do Exemplo 1.18 (compensador avanço).

A função de transferência $H(s)$ pode ser obtida notando-se que o sistema possui ganho DC igual a -20 dB (0.1), um zero em $\omega = 1$ e um polo em $\omega = 10$, resultando em

$$H(s) = \frac{s+1}{s+10} = \frac{1}{10}\left(\frac{s+1}{1}\right)\left(\frac{10}{s+10}\right)$$

O diagrama assintótico de fase é mostrado na Figura 19. Esse sistema, denominado compensador avanço, é utilizado em cascata com uma planta para aumentar a fase do conjunto em uma faixa de frequência.

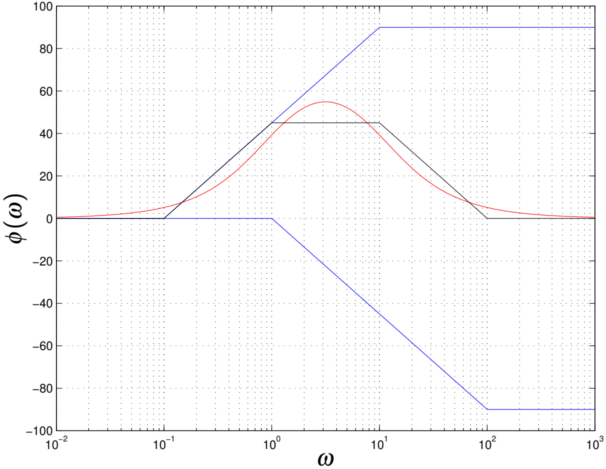


Figura: Diagrama de fase do Exemplo 1.18 (compensador avanço).

Exemplo 1.19 (Compensador atraso ou *lag*)

Considere o diagrama assintótico de fase de um sistema mostrado na Figura 20, cujo ganho DC é 0 dB (1).

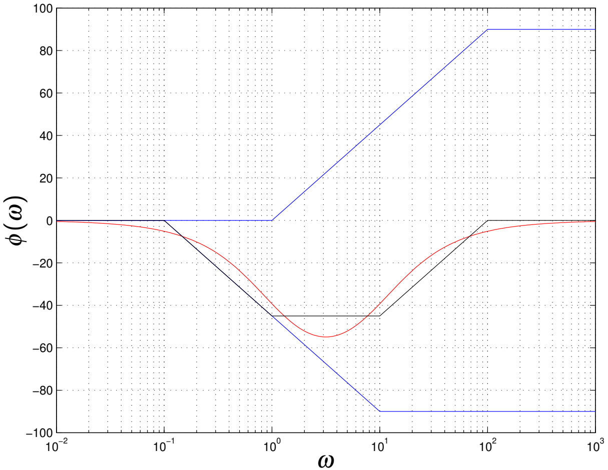


Figura: Diagrama de fase do Exemplo 1.19 (compensador atraso).

O diagrama de módulo pode ser obtido notando-se que o sistema possui um polo em $\omega = 1$ e um zero em $\omega = 10$, resultando em

$$H(s) = 0.1\frac{s+10}{s+1} = \left(\frac{1}{s+1}\right)\left(\frac{s+10}{10}\right)$$

O diagrama assintótico de módulo é mostrado na Figura 21. Esse sistema, denominado compensador atraso, é utilizado em cascata com uma planta para diminuir a fase do conjunto em uma faixa de frequência.

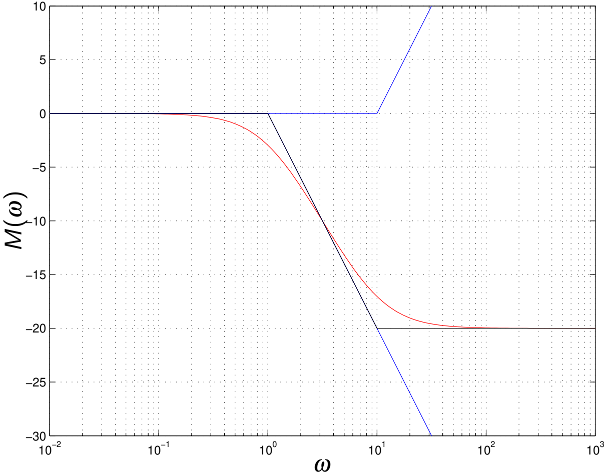


Figura: Diagrama de módulo do Exemplo 1.19 (compensador atraso).

Exemplo 1.20 (Relação sinal-ruído)

A relação sinal-ruído é definida como

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{dB}} = 20\log|a/b|$$

sendo a a amplitude do sinal e b a amplitude do ruído.

Aplicando o sinal $x(t) = 100\text{sen}(t)$ contaminado pelo ruído aditivo $w(t) = \text{sen}(10t)$ aos sistemas dos exemplos 1.18 e 1.19, as relações sinal-ruído nas saídas dos sistemas (baseadas nas assíntotas) são 20 dB e 60 dB, respectivamente.

Gráficos polares

A resposta em frequência $H(j\omega)$ de sistemas lineares pode ser representada no plano complexo por coordenadas polares, isto é, módulo e fase parametrizados na frequência ω. Ângulos positivos são representados no sentido anti-horário.

Freqüentemente, é mais conveniente determinar as expressões da parte real e da parte imaginária da função de transferência para obter o lugar geométrico (gráfico polar) no plano complexo.

Gráficos polares do sistema em malha aberta podem ser utilizados para estudar a estabilidade do sistema em malha fechada (critério de Nyquist).

Exemplo – Zero na origem

Exemplo 1.21 (Zero na origem)

Para $k > 0$, tem-se

$$H(s) = ks\Big|_{s=j\omega} = k\omega\exp(j\pi/2)$$

que é o eixo imaginário positivo, isto é, para $\omega = 0$ o módulo é zero, e para $\omega \to +\infty$ o módulo tende para infinito, sempre com fase igual a $+90$ graus.

Exemplo 1.22 (Polo na origem)

Para $k > 0$, tem-se

$$H(s) = \frac{k}{s}\Big|_{s=j\omega} = \frac{k}{\omega}\exp(-j\pi/2)$$

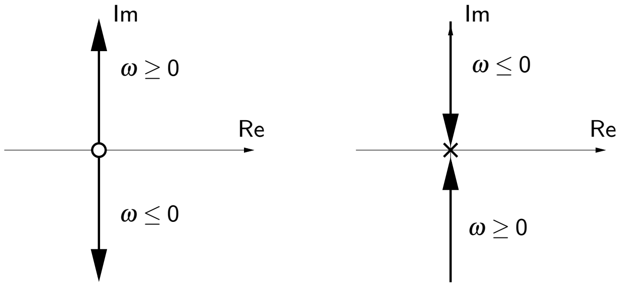
que é o eixo imaginário negativo, isto é, para $\omega \to 0$ o módulo tende a infinito, e para $\omega \to +\infty$ o módulo tende a zero, sempre com fase igual a -90 graus.

Propriedade 2

Para sistemas lineares invariantes no tempo com resposta ao impulso real, o lugar geométrico do diagrama polar de $H(s)$, $s = j\omega$, $\omega \in (-\infty, +\infty)$ é simétrico em relação ao eixo real, isto é,

$$H(-j\omega) = H(j\omega)^* = M(\omega)\exp\big(-j\phi(\omega)\big)$$

A Figura mostra os lugares geométricos do zero e do polo na origem para $\omega \in (-\infty, +\infty)$.



Exemplo 1.23 (Zero real negativo)

$$H(s) = 1 + \frac{s}{\omega_c}\Big|_{s=j\omega} = 1 + j\frac{\omega}{\omega_c}$$

O lugar geométrico é uma reta de inclinação igual a 90 graus partindo do ponto $1+j0$.

Exemplo 1.24 (Polo real negativo)

$$H(s) = \frac{\omega_c}{s+\omega_c}\Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{1+j\omega/\omega_c} = M(\omega)\exp\big(j\phi(\omega)\big)$$

Para $\omega = 0$, o módulo vale 1 e a fase 0. Para $\omega \to +\infty$, o módulo tende a 0 e a fase a -90 graus. Em $\omega = \omega_c$, tem-se

$$\frac{1}{1+j} = \frac{1}{\sqrt{2}}\exp(-j\pi/4) = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2}$$

O lugar geométrico é uma semi-circunferência de raio igual a 1/2, pois

$$(X(\omega)-\frac{1}{2})^2+Y(\omega)^2=(\frac{1}{2})^2$$

com

$$X(\omega)=\mathrm{Re}\big(H(j\omega)\big)=\frac{1}{1+(\omega/\omega_c)^2} \quad , \quad Y(\omega)=\mathrm{Im}\big(H(j\omega)\big)=\frac{-\omega/\omega_c}{1+(\omega/\omega_c)^2}$$

começando em $1+j0$ e terminando na origem, quando $\omega \in [0,+\infty)$. De maneira complementar, para ω de $-\infty$ até zero, tem-se uma semi-circunferência positiva de raio $1/2$ indo de zero até o ponto $1+j0$.

Assim, para $k>0$, o gráfico polar de

$$H(s)=k\frac{\omega_c}{s+\omega_c}$$

é uma circunferência de raio $k/2$ centrada em $k/2+j0$.

Exemplo 1.25 (Polos complexos)

Considerando $0 < \xi < 1$ (polos complexos), tem-se

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$H(j0) = 1 \quad , \quad H(+j\infty) = 0\angle -\pi \quad , \quad H(j\omega_n) = \frac{1}{j2\xi} = \frac{1}{2\xi}\angle -\pi/2$$

A Figura 22 mostra o gráfico polar do Exemplo 1.25 para $\xi = 0.1$ e $\xi = 0.9$. Observe que o cruzamento com o eixo imaginário ocorre em $1/(2\xi)$. Para sistemas subamortecidos $\xi < \sqrt{2}/2$, o maior valor de $M(\omega)$ ocorre em ω_r (veja Exemplo 1.15), com

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \quad ; \quad M(\omega_r) = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}\bigg|_{\xi=0.1} \approx 5$$

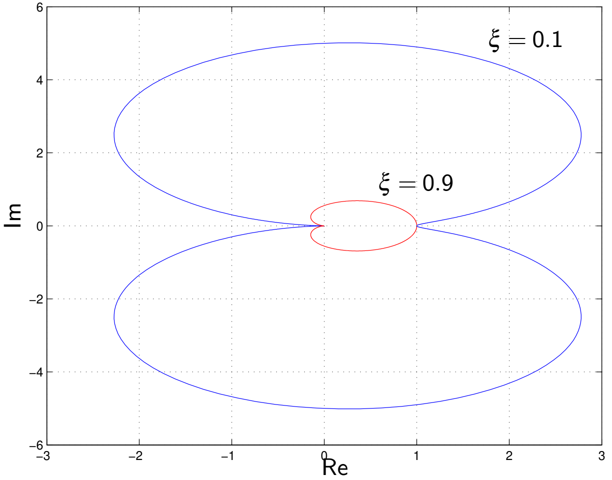


Figura: Gráfico polar do Exemplo 1.25 para $\xi = 0.1$ e $\xi = 0.9$.

Exemplo 1.26

Considere o sistema do tipo 1, isto é, um polo em 0

$$H(s) = \frac{a}{s(s+a)}\ ,\ a > 0 \quad \Rightarrow \quad H(j\omega) = \frac{-a}{a^2+\omega^2} - j\frac{a^2}{\omega(a^2+\omega^2)}$$

Fazendo a análise para $\omega \to 0$, tem-se

$$\omega \ll a \quad \Rightarrow \quad H(j\omega) \approx -\frac{1}{a} - j\frac{1}{\omega}$$

que define uma assíntota paralela ao eixo imaginário cruzando o eixo real em $-1/a$.

Para $\omega \to +\infty$, $H(j\omega) \to 0$.

No ponto $\omega = a$, tem-se

$$H(ja) = -\frac{1}{2a} - j\frac{1}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{2a}\angle -135 \text{ graus}$$

O diagrama polar poderia ser obtido a partir do diagrama de Bode, fazendo-se primeiro o diagrama de fase e depois calculando os módulos para valores relevantes de fase.

No exemplo, $H(s)$ possui um polo em 0 e um polo em a, indicando que a fase parte de -90 graus e vai até -180 graus, passando em -135 graus na frequência $\omega = a$. Os módulos correspondentes são $+\infty$, 0 e $\sqrt{2}/2a$. A Figura 23 mostra o diagrama polar para $a = 1/2$.

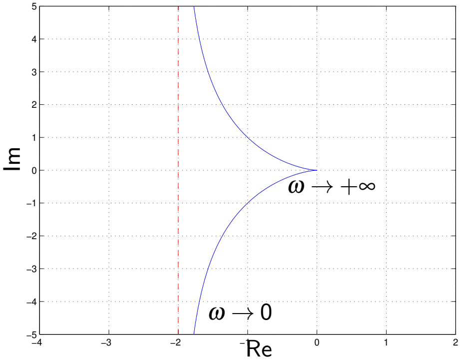


Figura: Gráfico polar do Exemplo para $a = 1/2$.

Exemplo 1.27

Considere o sistema

$$H(s) = k\left(\frac{a}{s+a}\right)\left(\frac{b}{s+b}\right)\left(\frac{c}{s+c}\right) \quad , \quad k, a, b, c \text{ positivos}$$

O diagrama polar começa (para $\omega = 0$) no ponto $(k, 0)$ e termina na origem, com fase -270 graus. A Figura 24 mostra o diagrama polar para $k = 1$, $a = 1$, $b = 2$ e $c = 3$. Observe que o ganho é aproximadamente 0.1 na fase -180 graus e 0.6 na fase -90 graus.

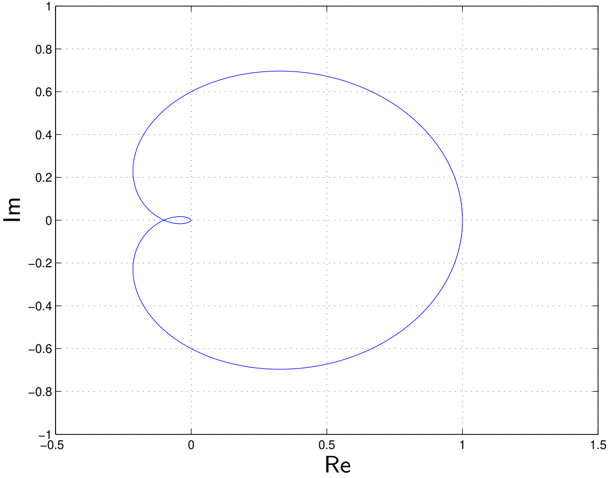


Figura: Gráfico polar do Exemplo para $k = 1$, $a = 1$, $b = 2$ e $c = 3$.

Exemplo 1.28 (Polo real positivo)

O estudo da resposta em frequência por diagramas de Bode (módulo e fase) aplica-se a sistemas lineares estáveis, isto é, funções de transferência com polos com parte real negativa. No entanto, para o estudo da estabilidade de sistemas realimentados, as vezes é necessário traçar diagramas polares de sistemas com polos instáveis (parte real positiva). Considere o sistema cuja função de transferência é dada por

$$H(s) = \frac{\omega_c}{s - \omega_c}, \quad \omega_c > 0$$

Para $s = j\omega$, o módulo é idêntico ao do sistema do Exemplo 1.2 (polo com parte real negativa), porém a fase vai de -180 (baixa frequência, $\omega \ll \omega_c$) a -90 graus (alta frequência, $\omega \gg \omega_c$), passando por -135 graus em $\omega = \omega_c$.

Note que

$$X(\omega) = \text{Re}\big(H(j\omega)\big) = \frac{-1}{1 + (\omega/\omega_c)^2} \quad , \quad Y(\omega) = \text{Im}\big(H(j\omega)\big) = \frac{-\omega/\omega_c}{1 + (\omega/\omega_c)^2}$$

e, portanto (veja o Exemplo 1.24) o gráfico polar é uma semi-circunferência de raio 0.5 começando em $-1 + j0$ e terminando na origem quando $\omega \in [0, +\infty)$, com a correspondente parte complementar quando $\omega \in (-\infty, 0]$.