Livro (e-book): Linearidade em Sinais e Sistemas, Ivanil S. Bonatti, Amauri Lopes, Pedro L. D. Peres, Cristiano M. Agulhari,

Ed. Blucher, SP, 2015, 1ed., ISBN: 9788521208921.

Prof. Pedro L. D. Peres

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

Resolução de Equações Diferenciais por Coeficientes a Determinar

Equações diferenciais lineares com coeficientes constantes podem ser resolvidas pelo método dos coeficientes a determinar.

Solução da equação homogênea

Considere a equação diferencial homogênea

$$D(p)y(t) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k p^k y(t) = 0 \quad , \quad p = \frac{d}{dt} \ , \ p^k = \frac{d^k}{dt^k} \tag{1}$$

com $\alpha_m = 1$ e condições iniciais conhecidas, que descreve um sistema linear autônomo.

Observe que a equação é uma restrição linear (combinação linear das funções $y(t)$, $\dot{y}(t)$, ..., $y^{(m)}(t)$) e portanto a solução $y(t)$ deve necessariamente estar em um espaço de dimensão m.

Independência Linear

Definição 1 (Independência Linear)

Um conjunto de sinais $\{y_k(t), k = 1, \ldots, m\}$ é linearmente independente se e somente se

$$\sum_{k=1}^{m} c_k y_k(t) = 0 \ , \ \forall t \quad \Rightarrow \quad c_k = 0 \ , \ k = 1, \ldots, m$$

Exemplo 1.1 (Linearmente independentes)

Os sinais $y_1(t) = 1$, $y_2(t) = t$ e $y_3(t) = t^2$ são linearmente independentes.

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + c_3 y_3(t) = 0, \ \forall t \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = c_3 = 0, \quad \text{pois}$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = 2 \neq 0$$

Base

Definição 2 (Base)

A combinação linear de um conjunto de m sinais $y_k(t)$, isto é,

$$y(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k y_k(t)$$

com escalares $c_k \in \mathbb{C}$ gera um espaço linear, cuja dimensão é dada pelo número $r \leq m$ de sinais linearmente independentes. Qualquer conjunto de r sinais que gere o mesmo espaço é uma base para esse espaço.

Propriedade 1 (Independência linear)

Os sinais $y_1(t) = \exp(\lambda_1 t)$ e $y_2(t) = \exp(\lambda_2 t)$ são linearmente independentes se e somente se $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Note que $a_1 \exp(\lambda_1 t) + a_2 \exp(\lambda_2 t) = 0$, $\forall t$, implica

$$\left.\begin{array}{c} a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 \exp(\lambda_1) + a_2 \exp(\lambda_2) = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2 = 0$$

Derivada de auto-função

Propriedade 2 (Derivada de auto-função)

As funções $y_1(t) = \exp(\lambda t)$ *e* $y_2(t) = p^k \exp(\lambda t)$ *são linearmente dependentes, pois*

$$y_2(t) = \lambda^k \exp(\lambda t)$$

Propriedade 3 (Modo próprio)

$y(t) = \exp(\lambda t)$ *é solução da equação (1) se* λ *é raiz de* $D(\lambda) = 0$ *(equação característica), pois*

$$D(p)\exp(\lambda t) = D(\lambda)\exp(\lambda t) = 0$$

Exemplo – Raiz simples

Exemplo 1.2 (Raiz simples)

Considere o circuito RC autônomo, com condição inicial (tensão no capacitor) $y(0)$ e $RC = \tau$.

$$(\tau p + 1)y = 0 \quad , \quad y(0)$$

cuja equação característica é

$$\tau\lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{\tau}$$

A solução é dada por

$$y(t) = a\exp(\lambda t)$$

sendo a o coeficiente a determinar. Usando a condição inicial, tem-se

$$y(t) = y(0)\exp(\lambda t)$$

Modos próprios

Propriedade 4 (Modos próprios)

Se as m raízes λ_k de $D(\lambda) = 0$ forem distintas, então

$$y(t) = \sum_{k=1}^{m} a_k \exp(\lambda_k t)$$

é solução da equação (1) pois λ_k satisfaz $D(\lambda_k) = 0$, $k = 1, \ldots, m$ e os modos próprios $\exp(\lambda_k t)$, $k = 1, \ldots, m$ são linearmente independentes.

Exemplo

Exemplo 1.3 (Duas raízes reais distintas)

Considere o sistema descrito pela equação diferencial

$$p(p+1/\tau)y = 0 \quad , \quad y(0) = 0 \; , \; \dot{y}(0) = 1/\tau$$

cuja equação característica é

$$\lambda(\lambda+1/\tau) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0 \; , \; \lambda_2 = -1/\tau$$

A solução é dada por

$$y(t) = a_1 + a_2 \exp(-t/\tau)$$

Das condições iniciais, tem-se

$$a_1 = 1 \quad , \quad a_2 = -1$$

Exemplo – Duas raízes complexas conjugadas

Exemplo 1.4 (Duas raízes complexas conjugadas)

Considere o sistema descrito pela equação diferencial

$$(p^2 + 2\sqrt{3}p + 4)y = 0 \quad , \quad y(0) = 1 \; , \; \dot{y}(0) = 0$$

cuja raízes da equação característica são

$$\lambda_1 = -\sqrt{3} + j \; , \; \lambda_2 = -\sqrt{3} - j$$

A solução é dada por

$$y(t) = a_1 \exp(\lambda_1 t) + a_2 \exp(\lambda_2 t)$$

Das condições iniciais, tem-se

$$a_1 = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad a_2 = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

De maneira equivalente, a combinação linear de modos próprios complexos conjugados pode ser escrita como

$$y(t) = a \exp(-\sqrt{3}t)\cos(t + \theta) \quad , \quad \theta = -\pi/3 \; , \; a = 2$$

Exemplo – Três raízes distintas

Exemplo 1.5 (Três raízes distintas)

Considere o sistema descrito pela equação diferencial

$$(p^2+1)(p+1)y = 0 \quad , \quad y(0) = y_0 \ , \ \dot{y}(0) = 1 - y_0 \ , \ \ddot{y}(0) = y_0 - 1$$
$$\lambda_1 = -1 \quad , \quad \lambda_2 = j \ , \ \lambda_3 = -j$$

A solução é dada por

$$y(t) = a_1 \exp(-t) + a_2 \exp(jt) + a_3 \exp(-jt)$$

Das condições iniciais, tem-se

$$a_1 = y_0 - 1/2 \quad , \quad a_2 = (1-j)/4 \quad , \quad a_3 = (1+j)/4$$

Portanto,

$$y(t) = (y_0 - 1/2)\exp(-t) + \frac{1}{4}(\exp(jt) + \exp(-jt)) + \frac{1}{4j}(\exp(jt) - \exp(-jt))$$
$$= (y_0 - 1/2)\exp(-t) + \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\text{sen}(t)$$

Operador p do produto

Propriedade 5 (Operador p do produto)

Para $n \geq 0$ inteiro, com $p = \dfrac{d}{dt}$ e $p^0 f(t) = f(t)$, tem-se

$$p^n\big(f(t)g(t)\big) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k f(t) p^{n-k} g(t)$$

pois

$$p\big(f(t)g(t)\big) = f(t)pg(t) + g(t)pf(t)$$

$$p^2\big(f(t)g(t)\big) = g(t)p^2 f(t) + f(t)p^2 g(t) + 2pf(t)pg(t) \quad , \quad \cdots$$

Operador p do produto $t\exp(\lambda t)$

Propriedade 6 (Operador p do produto $t\exp(\lambda t)$)

$$D(p)\big(t\exp(\lambda t)\big) = tD(\lambda)\exp(\lambda t) + \exp(\lambda t)\frac{d}{d\lambda}D(\lambda)$$

pois

$$D(p)\big(t\exp(\lambda t)\big) = \exp(\lambda t)\sum_{k=0}^{m}\alpha_k\sum_{r=0}^{k}\lambda^{k-r}\begin{pmatrix} k \\ r \end{pmatrix}p^r t =$$

$$= \exp(\lambda t)\left(t\sum_{k=0}^{m}\alpha_k\lambda^k + \sum_{k=1}^{m}\alpha_k k\lambda^{k-1}\right) = \exp(\lambda t)\left(tD(\lambda) + \frac{d}{d\lambda}D(\lambda)\right)$$

Raiz dupla

Propriedade 7 (Raiz dupla)

Se λ é raiz dupla da equação característica $D(\lambda) = 0$, então $\exp(\lambda t)$ e $t\exp(\lambda t)$ são modos próprios da equação (1), ou seja,

$$D(p)(t\exp(\lambda t)) = \exp(\lambda t)\left(tD(\lambda) + \frac{d}{d\lambda}D(\lambda)\right) = 0$$

pois $D(\lambda) = 0$ e $\left.\frac{d}{dp}D(p)\right|_{p=\lambda} = 0$ quando λ é raiz dupla de $D(\lambda)$.

Propriedade 8 (Raiz múltipla)

Se λ é raiz de multiplicidade r de $D(\lambda)$, então $\exp(\lambda t)$, $t\exp(\lambda t)$, $\ldots$, $t^{r-1}\exp(\lambda t)$ são modos próprios da equação (1).

Solução da equação homogênea

Propriedade 9 (Solução da equação homogênea)

A solução da equação (1) é dada pela combinação linear dos seus m modos próprios.

Exemplo 1.6 (Duas raízes iguais)

Considere o sistema descrito pela equação diferencial

$$(p+1)^2 y = 0 \quad , \quad y(0) = 0 \; , \; \dot{y}(0) = 1$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

A solução é dada por

$$y(t) = a_1 \exp(-t) + a_2 t \exp(-t)$$

Das condições iniciais, tem-se

$$a_1 = 0 \quad , \quad a_2 = 1$$

Exemplo 1.7 (Massa-mola com amortecedor)

Considere um modelo simplificado do sistema mola-amortecedor de um carro, com uma massa m sustentada por uma mola de constante k e um amortecedor de constante b, descrito pela equação diferencial

$$m\ddot{y} = -ky - b\dot{y} \quad \Rightarrow \quad (p^2 + 2\alpha p + \beta^2)y = 0 \ , \ \alpha = \frac{b}{2m} \ , \ \beta^2 = \frac{k}{m}$$

sendo y o deslocamento vertical em relação ao ponto de equilíbrio. As raízes da equação característica são

$$\lambda_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \ \ , \ \ \lambda_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$$

e portanto sempre têm parte real negativa. Para que não ocorram oscilações, o sistema deve ter raízes reais, isto é

$$\alpha^2 > \beta^2 \quad \Rightarrow \quad b > 2\sqrt{km}$$

A situação $\alpha^2 = \beta^2$ é conhecida como amortecimento crítico. Nesse caso, a solução é dada por

$$y(t) = a_1 \exp(-\alpha t) + a_2 t \exp(-\alpha t) \ \ , \ \ a_1 = y(0) \ , \ a_2 = \dot{y}(0) + \alpha y(0)$$

Exemplo – Duas raízes iguais e uma distinta

Exemplo 1.8 (Duas raízes iguais e uma distinta)

Considere o sistema descrito pela equação diferencial

$$p^2(p+1/\tau)y = 0 \quad , \quad y(0) = 0 \; , \; \dot{y}(0) = 0 \; , \; \ddot{y}(0) = 1/\tau$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad , \quad \lambda_3 = -1/\tau$$

A solução é dada por

$$y(t) = a_1 + a_2 t + a_3 \exp(-t/\tau)$$

Das condições iniciais, tem-se

$$a_1 = -\tau \quad , \quad a_2 = 1 \quad , \quad a_3 = \tau$$

Solução da equação não homogênea

Considere a equação diferencial não homogênea

$$D(p)y(t) = N(p)x(t) \tag{2}$$

com $\alpha_m = 1$ e condições iniciais conhecidas, que descreve um sistema linear não autônomo.

A equação (2) pode ser resolvida pelo método dos coeficientes a determinar sempre que $x(t)$ for solução de uma equação diferencial homogênea dada por

$$\bar{D}(p)x(t) = 0$$

O polinômio $\bar{D}(p)$ define os modos do espaço que contém $x(t)$. Portanto, multiplicando a equação (2) dos dois lados por $\bar{D}(p)$, tem-se a equação homogênea

$$\bar{D}(p)D(p)y(t) = N(p)\bar{D}(p)x(t) = 0$$

que contém os modos próprios de $D(p)$ e os modos forçados de $\bar{D}(p)$.

As condições iniciais que permitem a solução desse sistema aumentado são as originais acrescidas de tantas quanto for o grau de $\bar{D}(p)$, obtidas por substituição sistemática na equação (2).

Exemplo – Primeira ordem com entrada constante

Exemplo 1.9 (Primeira ordem com entrada constante)

Considere o sistema descrito pela equação diferencial

$$(p+1/\tau)y = 1/\tau \quad , \quad y(0) = 0$$

Neste caso, $\bar{D}(p) = p$, pois a entrada $x(t) = (1/\tau)\exp(0t)$ está no espaço de dimensão um descrito pelo modo próprio associado à raiz 0, resultando na equação homogênea (resolvida no Exemplo 1.3)

$$p(p+1/\tau)y = 0 \quad , \quad y(0) = 0 \; , \; \dot{y}(0) = 1/\tau$$

A condição $\dot{y}(0)$ foi obtida da equação original.

Exemplo – Primeira ordem com entrada senoidal

Exemplo 1.10 (Primeira ordem com entrada senoidal)

Considere o sistema descrito pela equação diferencial

$$(p+1)y = \cos(t) \quad , \quad y(0) = y_0$$

Neste caso, $\bar{D}(p) = p^2 + 1$, pois a entrada $x(t) = \cos(t)$ está no espaço de dimensão dois descrito pelos modos próprios associados às raízes j e $-j$, resultando na equação homogênea (resolvida no Exemplo 1.5)

$$(p^2+1)(p+1)y = 0 \quad , \quad y(0) = y_0 \ , \ \dot{y}(0) = 1 - y_0 \ , \ \ddot{y}(0) = y_0 - 1$$

Exemplo – Primeira ordem com entrada exponencial: ressonância

Exemplo 1.11 (Primeira ordem com entrada exponencial: ressonância)

Considere o sistema descrito pela equação diferencial

$$(p+1)y = \exp(-t) \quad , \quad y(0) = 0$$

Neste caso, $\bar{D}(p) = p+1$, pois a entrada $x(t) = \exp(-t)$ está no espaço de dimensão 1 descrito pelos modo próprio associado à raiz -1, resultando na equação homogênea (resolvida no Exemplo 1.6)

$$(p+1)^2 y = 0 \quad , \quad y(0) = 0 \ , \ \dot{y}(0) = 1$$

Observe que a coincidência do modo próprio da função excitadora com o modo próprio do sistema produz uma solução equivalente à obtida para duas raízes iguais.

Exemplo

Exemplo 1.12

Considere a equação diferencial

$$(p^2+3p+2)y=(p+4)x \quad , \quad y(0)=2 \; , \; \dot{y}(0)=1$$

Com a entrada $x(t)=\exp(-3t)$, tem-se

$$\bar{D}(p)=(p+3) \quad \Rightarrow \quad (p+1)(p+2)(p+3)y=(p+4)(p+3)x=0$$

com a condição inicial

$$\ddot{y}(0)=-3\dot{y}(0)-2y(0)+\dot{x}(0)+4x(0)=-6$$

A solução é dada por

$$y(t)=5.5\exp(-t)-4\exp(-2t)+0.5\exp(-3t)$$

Note que o polinômio $N(p)=p+4$ só interfere na condição inicial $\ddot{y}(0)$.

Solução forçada

Propriedade 10 (Solução forçada)

O método dos coeficientes a determinar pode ser aplicado diretamente à equação diferencial não homogênea (2). Para isso, identificam-se as parcelas homogênea e forçada (devido à entrada) da solução.

$$y(t) = y_h(t) + y_f(t) \quad \Rightarrow \quad D(p)\big(y_h(t) + y_f(t)\big) = N(p)x(t)$$

$$D(p)y_f(t) = N(p)x(t) \tag{3}$$

pois $D(p)y_h(t) = 0$*. As parcelas homogênea e forçada são dadas por*

$$y_h(t) = \sum_{k=1}^{m} a_k f_k(t) \quad , \quad y_f(t) = \sum_{k=1}^{\bar{m}} b_k g_k(t)$$

sendo $f_k(t)$ *os* m *modos próprios associados a* $D(\lambda) = 0$ *e* g_k *os* $\bar{m}$ *modos forçados associados a* $\bar{D}(\gamma) = 0$*, considerando-se as possíveis multiplicidades com as raízes* λ*.*

Os coeficientes b_k *são obtidos da equação (3) e, em seguida, os coeficientes* a_k *são obtidos a partir das condições iniciais aplicadas na solução* $y(t)$*.*

Exemplo – Solução forçada à entrada senoidal

Exemplo 1.13 (Solução forçada à entrada senoidal)

Considere o sistema descrito pela equação diferencial

$$(p+1)y = 10\cos(2t) \quad , \quad y(0) = 0$$

A raiz de $D(\lambda) = 0$ é -1 e as raízes de $\bar{D}(\gamma) = 0$ são

$$\gamma_1 = 2j \quad , \quad \gamma_2 = -2j$$

e portanto não há coincidência de raízes entre $D(\lambda) = 0$ e $\bar{D}(\gamma) = 0$. Assim,

$$y_f(t) = b_1 \exp(\gamma_1 t) + b_2 \exp(\gamma_2 t)$$

Substituindo na equação, tem-se

$$\gamma_1 b_1 \exp(\gamma_1 t) + \gamma_2 b_2 \exp(\gamma_2 t) + b_1 \exp(\gamma_1 t) + b_2 \exp(\gamma_2 t) = 5\exp(\gamma_1 t) + 5\exp(\gamma_2 t)$$

resultando em

$$b_1 = \frac{5}{\gamma_1 + 1} = 1 - j2 \quad , \quad b_2 = \frac{5}{\gamma_2 + 1} = 1 + j2$$

Exemplo – Solução forçada à entrada senoidal

Assim,

$$y(t) = a\exp(-t) + (1-j2)\exp(j2t) + (1+j2)\exp(-j2t)$$

Das condições iniciais, obtém-se $a = -2$.

Note que os modos forçados podem ser escritos em termos trigonométricos, ou seja,

$$y_f(t) = b_c\cos(2t) + b_s\mathrm{sen}(2t)$$

Derivando e substituindo na equação, obtêm-se

$$b_c = 2 \quad , \quad b_s = 4$$

ou, ainda,

$$y_f(t) = 10\left|\frac{1}{1+j2}\right|\cos\left(2t + \angle\frac{1}{1+j2}\right) \approx 4.47\cos(2t - 1.11)$$

Exemplo – Solução forçada à entrada exponencial

Exemplo 1.14 (Solução forçada à entrada exponencial)

Considere o sistema dado por

$$(p+1)y = 10\exp(-t) \quad , \quad y(0) = 1$$

$$\lambda = -1 \quad , \quad \gamma = -1$$

Portanto, a parte forçada é dada por

$$y_f(t) = bt\exp(-t) \quad \Rightarrow \quad b = 10$$

A solução é

$$y(t) = a\exp(-t) + 10t\exp(-t) \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

Exemplo – Solução forçada à entrada polinomial

Exemplo 1.15 (Solução forçada à entrada polinomial)

Considere o sistema descrito pela equação

$$(p^2+2\sqrt{3}p+4)y = 8t \quad , \quad y(0)=1 \; , \; \dot{y}(0)=0$$

$$\lambda_1 = -\sqrt{3}+j \; , \; \lambda_2 = -\sqrt{3}-j \; , \; \gamma_1 = 0 \; , \; \gamma_2 = 0$$

Portanto,

$$y_f(t) = b_1 + b_2 t \quad \Rightarrow \quad b_1 = -\sqrt{3} \; , \; b_2 = 2$$

$$y(t) = \exp(-\sqrt{3}t)\Big(a_1\cos(t) + a_2\mathrm{sen}(t)\Big) - \sqrt{3} + 2t \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2 = 1+\sqrt{3}$$

Resposta ao impulso

Propriedade 11 (Resposta ao impulso)

$$D(p)y(t) = N(p)x(t) \quad , \quad x(t) = \delta(t) \quad \textit{(condições iniciais nulas)}$$

A priori, o método dos coeficientes a determinar não poderia ser utilizado para determinar $y(t)$ pois não existe equação diferencial linear com coeficientes constantes que produza como solução a função $\delta(t)$.

Entretanto, a resposta ao impulso pode ser calculada pelo método dos coeficientes a determinar da seguinte forma. Primeiramente, resolva

$$D(p)f(t) = 1 \ , \quad \textit{(condições iniciais nulas)}$$

A resposta ao degrau é dada por $N(p)\big(f(t)u(t)\big)$, usando o operador p aplicado ao produto (Propriedade 5).

Por linearidade, a resposta ao impulso é dada pela derivada da resposta ao degrau, isto é,

$$h(t) = pN(p)\big(f(t)u(t)\big)$$

Exemplo – Resposta ao impulso I

Exemplo 1.16 (Resposta ao impulso)

Considere

$$(p+2)(p-3)y(t) = px(t) \quad , \quad x(t) = \delta(t) \ , \ \text{(condições iniciais nulas)}$$

$$(p+2)(p-3)f(t) = 1 \quad \Rightarrow \quad f(t) = b + a_1 \exp(-2t) + a_2 \exp(3t)$$

$$b = \frac{-1}{6} \quad , \quad f(0) = \dot{f}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{1}{10} \ , \ a_2 = \frac{1}{15}$$

A resposta ao degrau é dada por

$$y_u(t) = p\big(f(t)u(t)\big) = \big(pf(t)\big)u(t) + f(t)\big(pu(t)\big) = \big(pf(t)\big)u(t) + f(0)\delta(t) = \dot{f}(t)u(t)$$

$$\Rightarrow \quad y_u(t) = \big(-2a_1 \exp(-2t) + 3a_2 \exp(3t)\big)u(t) = \frac{1}{5}\big(\exp(3t) - \exp(-2t)\big)u(t)$$

Exemplo – Resposta ao impulso II

e a resposta ao impulso é dada por $h(t) = py_u(t)$

$$h(t) = p\big(\dot{f}(t)u(t)\big) = \ddot{f}(t)u(t) + \dot{f}(0)\delta(t) = \ddot{f}(t)u(t) = \frac{1}{5}\big(3\exp(3t) + 2\exp(-2t)\big)u(t)$$

Note que as respostas ao degrau e ao impulso poderiam ser obtidas por transformada de Laplace. A resposta ao impulso é a transformada inversa de $H(s)$, ou seja

$$H(s) = \frac{s}{(s+2)(s-3)} \ \Rightarrow \ H(s) = \frac{2/5}{s+2} + \frac{3/5}{s-3} \ , \ h(t) = \big(\frac{2}{5}\exp(-2t) + \frac{3}{5}\exp(3t)\big)u(t)$$

Exemplo 1.17

a) Determine a resposta ao degrau do sistema

$$(p+1)^2 y = x$$

Solução: fazendo $x = 1$ e $y(0) = \dot{y}(0) = 0$, tem-se

$$y_u(t) = b + a_1 \exp(-t) + a_2 t \exp(-t) \quad \Rightarrow \quad b = 1$$

$$\begin{cases} 0 = b + a_1 \\ 0 = -a_1 + a_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a_1 = -1 \ , \ a_2 = -1$$

Portanto, a resposta ao degrau é dada por

$$y_u(t) = \big(1 - \exp(-t) - t \exp(-t)\big) u(t)$$

b) Determine a resposta do sistema para $x(t) = 1$ e as condições iniciais $y(0) = 0$, $y(1) = 0$

$$(p+1)^2 y = 1$$

Solução: denotando $\dot{y}(0) = a$, tem-se

$$y(t) = b + a_1 \exp(-t) + a_2 t \exp(-t) \quad \Rightarrow \quad b = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = b + a_1 \\ a = -a_1 + a_2 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad a_1 = -1 \ , \ a_2 = a - 1$$

Portanto,

$$y(t) = 1 - \exp(-t) + (a-1) t \exp(-t)$$

Com a condição de contorno $y(1) = 0$, tem-se

$$a = 2 - \exp(1)$$

A Figura 1 mostra a evolução temporal das duas soluções. Observe que, no caso b), a imposição de $y(1) = 0$ alterou de maneira significativa a derivada no instante $t = 0$.

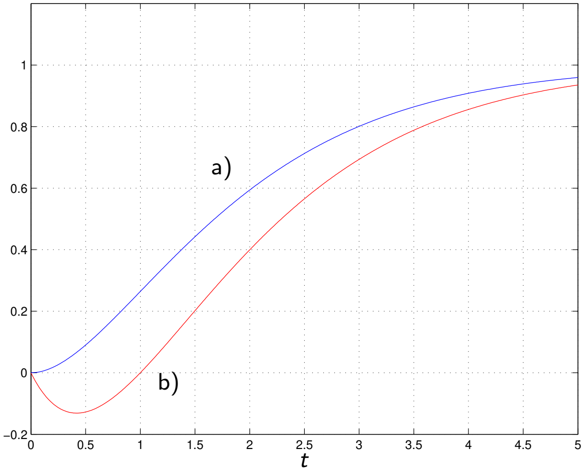

Figura: Respostas temporais do Exemplo 1.17.