Livro (e-book): Linearidade em Sinais e Sistemas, Ivanil S. Bonatti, Amauri Lopes, Pedro L. D. Peres, Cristiano M. Agulhari,

Ed. Blucher, SP, 2015, 1ed., ISBN: 9788521208921.

Prof. Pedro L. D. Peres

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

Transformada de Laplace

A transformada de Laplace decorre da definição de auto-função para sistemas lineares contínuos invariantes no tempo pois

$$h(t) * \exp(st) = H(s)\exp(st) \ , \ \ H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\exp(-st)dt \ \ , \ \ s \in \Omega_h$$

Também no Capítulo 7 foram apresentadas as propriedades do deslocamento no tempo e da transformada de Laplace da convolução,

$$\mathscr{L}\{y(t) = x(t-\tau)\} = X(s)\exp(-s\tau) \quad , \ \ \Omega_y = \Omega_x$$

$$\mathscr{L}\{x(t) = x_1(t) * x_2(t)\} = \mathscr{L}\{x_1(t)\}\mathscr{L}\{x_2(t)\} \quad , \ \ \Omega_x = \Omega_{x_1} \cap \Omega_{x_2}$$

Transformada bilateral de Laplace

Definição 1 (Transformada bilateral de Laplace)

A transformada bilateral de Laplace da função $x(t)$ é dada por

$$X(s) = \mathscr{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\exp(-st)dt \quad , \quad s \in \Omega_x$$

O domínio Ω_x é o conjunto dos valores de $s \in \mathbb{C}$ para os quais a integral é finita.

Propriedade 1 (Área de uma função)

A área sob a curva da função $x(t)$ pode ser computada por meio da transformada de Laplace $X(s)$ se $s = 0 \in \Omega_x$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = X(s)\Big|_{s=0}$$

Propriedade 2 (Transformada do impulso)

$$\mathscr{L}\{\delta(t)\} = 1 \quad , \quad s \in \mathbb{C}$$

pois

$$\mathscr{L}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\exp(-st)dt = 1$$

Propriedade 3 (Transformada do degrau)

$$\mathscr{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s} \quad , \quad s \in \Omega_u = \{s \in \mathbb{C}, Re(s) > 0\}$$

pois

$$\mathscr{L}\{u(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\exp(-st)dt =$$

$$\int_{0}^{+\infty} \exp(-st)dt = -\frac{1}{s}\exp(-st)\Big|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{s}, \; Re(s) > 0$$

Note que, diferentemente ao que ocorre com a transformada de Fourier

$$\mathscr{F}\{\delta(t)\} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{F}\{1\} = 2\pi\delta(\omega)$$

a transformada de Laplace $\mathscr{L}\{1\}$ não existe. De fato,

$$\mathscr{L}\{1\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-st)dt = -\frac{1}{s}\exp(-st)\Big|_{t=-\infty}^{t=+\infty}$$

que diverge qualquer que seja $s \in \mathbb{C}$.

Propriedade 4 (Transformada da exponencial)

$$\mathscr{L}\{\exp(\lambda t)u(t)\} = \frac{1}{s-\lambda} \quad , \quad s \in \big\{s \in \mathbb{C}, Re(s-\lambda) > 0\big\}$$

$$\text{pois } \mathscr{L}\{\exp(\lambda t)u(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\exp\big((\lambda - s)t\big)\,dt = \int_{0}^{+\infty} \exp\big((\lambda - s)t\big)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\lambda - s}\exp\big((\lambda - s)t\big)\Big|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{s-\lambda} \;,\; \mathrm{Re}(s-\lambda) > 0$$

Transformada da exponencial

Note que o domíno da transformada é relevante na descrição do sinal, e que sinais distintos podem ter a mesma expressão para a transformada, porém com domínios diferentes. De fato,

$$\mathscr{L}\{-\exp(\lambda t)u(-t)\} = \frac{1}{s-\lambda} \quad , \quad s \in \big\{s \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(s-\lambda) < 0\big\}, \qquad \text{pois}$$

$$\mathscr{L}\{-\exp(\lambda t)u(-t)\} = -\int_{-\infty}^{0} \exp\big((\lambda - s)t\big)\, dt =$$

$$-\frac{1}{\lambda - s} \exp\big((\lambda - s)t\big)\Big|_{t=-\infty}^{t=0} = \frac{1}{s-\lambda} \ , \ \mathrm{Re}(s-\lambda) < 0$$

Exemplo 1.1

Para $\beta > 0$, tem-se

$$\mathscr{L}\{\exp(j\beta t)u(t)\} = \frac{1}{s - j\beta} \quad , \ \mathrm{Re}(s) > 0$$

$$\mathscr{L}\{\exp(-j\beta t)u(t)\} = \frac{1}{s + j\beta} \quad , \ \mathrm{Re}(s) > 0$$

Propriedade 5 (Linearidade)

$$\mathscr{L}\{\alpha x(t)+\beta y(t)\} = \alpha\mathscr{L}\{x(t)\}+\beta\mathscr{L}\{y(t)\} \quad , \quad \Omega_{x+y} \supset \Omega_x \cap \Omega_y$$

Exemplo 1.2

Para $\beta > 0$, tem-se

$$\mathscr{L}\{\cos(\beta t)u(t)\} = \frac{1}{2}\mathscr{L}\{\exp(j\beta t)u(t)\} + \frac{1}{2}\mathscr{L}\{\exp(-j\beta t)u(t)\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\beta}+\frac{1}{s+j\beta}\right) = \frac{s}{s^2+\beta^2} \quad , \ \mathrm{Re}(s) > 0$$

Exemplo 1.3

Para $\beta > 0$, tem-se

$$\mathscr{L}\{\text{sen}(\beta t)u(t)\} = \frac{1}{2j}\mathscr{L}\{\exp(j\beta t)u(t)\} - \frac{1}{2j}\mathscr{L}\{\exp(-j\beta t)u(t)\} =$$

$$= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\beta} - \frac{1}{s+j\beta}\right) = \frac{\beta}{s^2+\beta^2} \quad , \ \text{Re}(s) > 0$$

Propriedade 6 (Transformada da integral)

$$\mathscr{L}\left\{y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\beta)d\beta = x(t) * u(t)\right\} = \frac{1}{s}\mathscr{L}\{x(t)\} \quad ,$$

$$\Omega_y \ \textit{contém} \ \Omega_x \cap \{s \in \mathbb{C} : Re(s) > 0\}$$

Exemplo 1.4

A transformada de Laplace de

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\beta)d\beta \ , \ X(s) = \frac{s}{s+1} \ , \ \mathrm{Re}(s) > -1$$

é dada por

$$Y(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{s}{s+1}\right) = \frac{1}{s+1} \ , \ \Omega_y \text{ contém } \mathrm{Re}(s) > 0$$

Exemplo (continuação)

De fato,

$$X(s) = \frac{s}{s+1} = 1 - \frac{1}{s+1} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \delta(t) - \exp(-t)u(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\beta)d\beta = u(t) - \big(1 - \exp(-t)\big)u(t) = \exp(-t)u(t)$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s+1} \text{ , Re}(s) > -1$$

Note que o domínio Ω_y resultante é maior do que a interseção $\Omega_x \cap \text{Re}(s) > 0$.
Observe também que a área de $x(t)$ é $X(0) = 0$ e a área de $y(t)$ é $Y(0) = 1$.

Exemplo 1.5

$$x(t) = 2\delta(t) - \exp(-t)u(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\beta)d\beta = \big(1+\exp(-t)\big)u(t)$$

$$X(s) = 2 - \frac{1}{s+1} = \frac{2s+1}{s+1} \quad , \quad \mathrm{Re}(s) > -1$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s}\left(\frac{2s+1}{s+1}\right) = \frac{1}{s}X(s) \quad , \quad \mathrm{Re}(s) > 0$$

Note que Ω_y é igual à interseção de Ω_x com $\mathrm{Re}(s) > 0$. Note ainda que a área de $x(t)$ é igual a $X(0) = 1$, $y(t)$ tem área não finita e $s = 0 \notin \Omega_y$.

Exemplo 1.6

$$\mathscr{L}\{\delta(t)\} = 1 \ , \ s \in \mathbb{C}$$

$$\mathscr{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s} \ , \quad \text{Re}(s) > 0 \quad \text{pois} \quad u(t) = \mathscr{I}_{\delta}(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\beta) d\beta$$

$$\mathscr{L}\{tu(t)\} = \frac{1}{s^2} \ , \quad \text{Re}(s) > 0 \quad \text{pois} \quad tu(t) = \mathscr{I}_{u}(t)$$

$$\mathscr{L}\left\{\frac{t^2}{2}u(t)\right\} = \frac{1}{s^3} \ , \quad \text{Re}(s) > 0$$

$$\mathscr{L}\left\{\frac{t^m}{m!}u(t)\right\} = \frac{1}{s^{m+1}} \ , \quad \text{Re}(s) > 0 \ , \ m \in \mathbb{N}$$

Propriedade 7 (Reversão no tempo)

$$\mathscr{L}\{x(-t)\} = X(-s) \quad , \quad -s \in \Omega_x$$

pois

$$\mathscr{L}\{x(-t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t)\exp(-st)dt = -\int_{+\infty}^{-\infty} x(t)\exp(st)dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\exp\big(-(-s)t\big)\,dt = X(-s)$$

Exemplo 1.7

$$\mathscr{L}\{u(-t)\} = \frac{1}{-s}\ ,\ -s \in \{\mathrm{Re}(s) > 0\} \equiv s \in \{\mathrm{Re}(s) < 0\}$$

Exemplo 1.8

$$\mathscr{L}\{\exp(t)u(-t)\} = \frac{1}{-s+1}\ ,\ -s \in \{\mathrm{Re}(s+1) > 0\} \equiv \mathrm{Re}(s) < 1$$

De fato,

$$\mathscr{L}\{\exp(t)u(-t)\} = \int_{-\infty}^{0} \exp(t)\exp(-st)dt = \frac{1}{s-1}\exp\big((s-1)t\big)\Big|_{0}^{+\infty}$$

que é finita se $\mathrm{Re}(s-1) < 0$, resultando em

$$\mathscr{L}\{\exp(t)u(-t)\} = \frac{1}{-s+1}\ ,\ \mathrm{Re}(s) < 1$$

Exemplo 1.9

$$\mathscr{L}\{x(t) = \exp(-|t|)\} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{-s+1} = \frac{2}{1-s^2} \; ,$$

$$\Omega_x = \{\mathrm{Re}(s) < 1\} \cap \{\mathrm{Re}(s) > -1\} \equiv \{-1 < \mathrm{Re}(s) < 1\}$$

Note que a área de $x(t)$ é $X(0) = 2$, pois $s = 0 \in \Omega_x$. Note também que

$$\mathscr{F}\{x(t)\} = \mathscr{L}\{x(t)\}\Big|_{s=j\omega} = \frac{2}{1+\omega^2}$$

pois $j\omega \in \Omega_x$.

Propriedade 8 (Deslocamento em s)

$$\mathscr{L}\{y(t) = \exp(-at)x(t)\} = X(s+a) \quad ; \quad \Omega_y = (s+a) \in \Omega_x$$

pois

$$\mathscr{L}\{\exp(-at)x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-at)x(t)\exp(-st)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\exp\big(-(s+a)t\big)dt$$

Exemplo 1.10

$$\mathscr{L}\{\cos(\beta t)\exp(-at)u(t)\} = \frac{s+a}{(s+a)^2+\beta^2} \quad , \ \mathrm{Re}(s+a) > 0$$

Exemplo 1.11

$$\mathscr{L}\{\mathrm{sen}(\beta t)\exp(-at)u(t)\} = \frac{\beta}{(s+a)^2+\beta^2} \quad , \ \mathrm{Re}(s+a) > 0$$

Propriedade 9 (Derivada em s)

$$\mathscr{L}\{y(t) = t^m x(t)\} = (-1)^m \frac{d^m X(s)}{ds^m} \quad ; \quad \Omega_y = \Omega_x \ , \ m \in \mathbb{N}$$

pois

$$X(s) = \mathscr{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\exp(-st)dt \implies$$

$$\frac{d^m X(s)}{ds^m} = (-1)^m \int_{-\infty}^{+\infty} t^m x(t)\exp(-st)dt$$

Exemplo 1.12

$$\mathscr{L}\{t^m u(t)\} = \frac{m!}{s^{m+1}} \ , \ \mathrm{Re}(s) > 0$$

que decorre das derivadas sucessivas em s aplicadas à transformada de Laplace do degrau. Aplicando também a Propriedade 8 (deslocamento em s), tem-se

$$\mathscr{L}\left\{\frac{t^m}{m!}\exp(-at)u(t)\right\} = \frac{1}{(s+a)^{m+1}} \ , \ \mathrm{Re}(s+a) > 0 \ , \ m \in \mathbb{N}$$

Exemplo 1.13

A integral da função $x(t)$

$$x(t) = t^2 \exp(-3t) u(t)$$

pode ser computada por meio da transformada de Laplace $X(s)$ se $s = 0 \in \Omega_x$. Usando a Propriedade 9 (derivada em s), tem-se

$$\mathscr{L}\{\exp(-3t)u(t)\} = \frac{1}{s+3} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{L}\{t^2 \exp(-3t)u(t)\} = \frac{d^2}{ds^2}(s+3)^{-1} = 2(s+3)^{-3}$$

Portanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \exp(-3t)u(t)dt = 2(s+3)^{-3}\Big|_{s=0} = \frac{2}{27}$$

Note que esse mesmo resultado pode ser obtido de

$$\mathscr{L}\{t^2 u(t)\} = \frac{2}{s^3}\Big|_{s=3} = \frac{2}{27}$$

Exemplo – Tempo de propagação I

Exemplo 1.14 (Tempo de propagação)

Para o circuito RLC da Figura 1, com $R = 2\ \Omega$, $L = 4$ H, $C = 1$ F e função de transferência

$$H(s) = \frac{1}{4s^2 + 2s + 1}$$

o tempo de propagação é dado por

$$t_p = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} th(t)dt}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt} = \frac{-\dfrac{d}{ds}H(s)\Big|_{s=0}}{H(0)} = 2$$

Exemplo – Tempo de propagação II

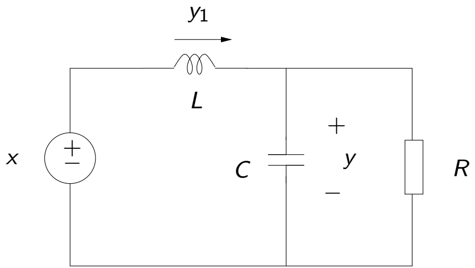

Figura: Circuito RLC.

Propriedade 10 (Transformada inversa de Laplace)

A transformada bilateral de Laplace é dada por

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\exp(-st)dt \quad ; \quad s \in \Omega_x$$

Para $s = \sigma + j\omega$, *tem-se*

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(x(t)\exp(-\sigma t)\big)\exp(-j\omega t)dt = \mathscr{F}\{x(t)\exp(-\sigma t)\}$$

sendo $\mathscr{F}\{x(t)\}$ *a transformada de Fourier de* $x(t)$. *Portanto,*

$$x(t)\exp(-\sigma t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(s)\exp(j\omega t)d\omega$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{+\infty} X(s)\exp(st)jd\omega = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)\exp(st)ds$$

Para σ *constante,* $ds = jd\omega$. *A integral em* s *é uma integral de contorno, definido pela reta que passa em* σ, *que contém o semiplano à direita de* σ.

Exemplo I

Exemplo 1.15

A transformada inversa de Laplace de

$$X(s) = \frac{1}{s+a} \quad , \quad \mathrm{Re}(s) > -a \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

pode ser computada por meio da transformada de Fourier associada, considerando-se $s = \sigma + j\omega$ para um σ conveniente.

Como

$$X(s)\Big|_{s=\sigma+j\omega} = \mathscr{F}\{x(t)\exp(-\sigma t)\}$$

tem-se, pela transformada inversa de Fourier,

$$x(t)\exp(-\sigma t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma + j\omega)\exp(j\omega t)d\omega$$

Exemplo II

O lado direito da expressão produz

$$\mathscr{F}^{-1}\{X(\sigma+j\omega)\} = \mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega+(\sigma+a)}\right\} = \exp\big(-(\sigma+a)t\big)u(t)\ ,\ \sigma+a>0$$

Portanto,

$$x(t) = \exp(-at)u(t)\ ,\ \sigma+a>0 \ \equiv\ \mathrm{Re}(s+a)>0$$

Exemplo I

Exemplo 1.16

A transformada inversa de

$$X(s) = \frac{s-1}{s^2(s+2)} = \frac{a}{s^2} + \frac{b}{s} + \frac{c}{s+2} = \frac{1}{4}\left(\frac{-2}{s^2} + \frac{3}{s} + \frac{-3}{s+2}\right) \ , \ \mathrm{Re}(s) > 0$$

é dada pela função à direita

$$x(t) = \frac{1}{4}\big(-2t + 3 - 3\exp(-2t)\big)u(t)$$

As constantes a, b e c podem ser obtidas pelo comando `residue` do matlab.

Note que o domínio Ω_x pode ser escrito como

$$\Omega_x = \{\mathrm{Re}(s) > 0 \cap \mathrm{Re}(s+2) > 0\}$$

evidenciando que o domínio é a região à direita do polo mais à direita de $X(s)$.

Para o domínio Ω_x à esquerda do polo mais à esquerda, isto é, $\mathrm{Re}(s+2) < 0$, a transformada inversa pode ser obtida pela Propriedade 7 (reversão no tempo).

Exemplo II

Definindo $y(t) = x(-t)$, tem-se

$$Y(s) = X(-s) = \frac{1}{4}\left(\frac{-2}{s^2} + \frac{-3}{s} + \frac{3}{s-2}\right)$$

e

$$\Omega_y = \{-s \in \Omega_x\} = \text{Re}(-s+2) < 0 = \text{Re}(s-2) > 0$$

Novamente, o domínio Ω_y é a região à direita do polo mais à direita de $Y(s)$, resultando em

$$y(t) = \frac{1}{4}\big(-2t - 3 + 3\exp(2t)\big)u(t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{4}\big(2t - 3 + 3\exp(-2t)\big)u(-t)$$

Note que $x(t)$ ocorre no intervalo $(-\infty, 0]$ (sinal à esquerda do zero).

Finalmente, para $\Omega_x = \{-2 < \text{Re}(s) < 0\}$, tem-se

$$x(t) = \frac{1}{4}(2t-3)u(-t) - \frac{3}{4}\exp(-2t)u(t)$$

Propriedade 11 (Transformada da derivada)

$$\mathscr{L}\{\dot{x}(t)\} = sX(s) \quad , \quad \Omega_{\dot{x}} \supset \Omega_x$$

pois, da expressão da transformada inversa

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) \exp(st) ds$$

tem-se

$$\frac{d}{dt} x(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) \exp(st) ds \right) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} sX(s) \exp(st) ds$$

Exemplo 1.17

$$\mathscr{L}\{\delta(t)=\dot{u}(t)\}=s\frac{1}{s}=1 \;\;,\;\; \Omega_\delta=\mathbb{C} \;\;,\;\; \Omega_u=\mathrm{Re}(s)>0$$

Note que o domínio da transformada da derivada contém estritamente o domínio Ω_u, devido ao cancelamento entre polo e zero.

$$\mathscr{L}\{\dot{\delta}(t)\}=s \;\;,\;\; \Omega_{\dot{\delta}}=\mathbb{C}$$