

Livro (e-book): Linearidade em Sinais e Sistemas,
Ivanil S. Bonatti, Amauri Lopes, Pedro L. D. Peres,
Cristiano M. Agulhari,

Ed. Blucher, SP, 2015, 1ed., ISBN: 9788521208921.

Prof. Pedro L. D. Peres

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

Amostragem de Sinais Contínuos

Teorema 1 (Amostragem)

Um sinal, limitado em frequência, pode ser representado com erro nulo por amostras igualmente espaçadas de intervalo $T < (2B)^{-1}$, sendo B a máxima frequência da transformada de Fourier do sinal.

Antes da demonstração do teorema, alguns resultados preliminares são necessários.

Ortogonalidade I

Propriedade 1

As funções *sampling* são ortogonais.

Prova:

Considere as funções *sampling* $\varphi_k(t)$ dadas por

$$\varphi_k(t) = \text{Sa}\left(\frac{\omega_0}{2}(t - kT)\right) \quad , \quad \text{com} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

mostradas na Figura 1.

Ortogonalidade II

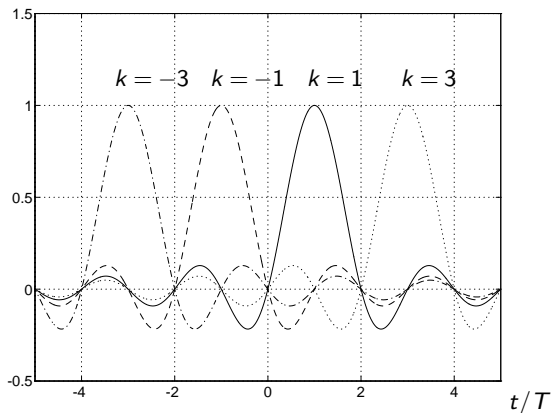


Figura: Funções *sampling* $Sa(\omega_0(t - kT)/2)$ para $k = -3, -1, 1, 3$.

Ortogonalidade III

Como as funções $\varphi_k(t)$ são reais, o produto escalar é dado por

$$I_{kl} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k(t)\varphi_l(t)dt \quad , \quad k \text{ e } l \text{ inteiros}$$

$$I_{kl} = \mathcal{F}\{\varphi_k(t)\varphi_l(t)\}\Big|_{\omega=0} = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{\varphi_k(t)\} * \mathcal{F}\{\varphi_l(t)\}\Big|_{\omega=0}$$

Note que

$$X(\omega) * Y(\omega)\Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)Y(-\omega)d\omega,$$

$$\Phi_k(\omega) = \mathcal{F}\{\varphi_k(t)\} = TG_{\omega_0}(\omega)\exp(-j\omega kT)$$

pois

$$\mathcal{F}\left\{\text{Sa}\left(\frac{\omega_0}{2}t\right)\right\} = \frac{2\pi}{\omega_0}G_{\omega_0}(\omega)$$

Ortogonalidade IV

Portanto,

$$\begin{aligned}
 I_{k\ell} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{TG_{\omega_0}(\omega) \exp(-j\omega kT)}_{\Phi_k(\omega)} \underbrace{TG_{\omega_0}(-\omega) \exp(j\omega \ell T)}_{\Phi_\ell(-\omega)} d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} T^2 \int_{-\omega_0/2}^{+\omega_0/2} \exp(-j\omega(k-\ell)T) d\omega \\
 I_{k\ell} &= \begin{cases} T & ; & k = \ell \\ 0 & ; & k \neq \ell \end{cases}
 \end{aligned}$$

Observe que as funções $\varphi_k(t)$ são ortogonais e de mesma norma.

Interpolação I

Teorema 2 (Amostragem (interpolação))

Se $x(t)$ é tal que

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega) \quad , \quad X(\omega) = 0 \quad , \quad |\omega| > 2\pi B \quad \text{e} \quad 0 < T < \frac{1}{2B}$$

então

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) \text{Sa}\left(\frac{\omega_0}{2}(t - kT)\right) \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Prova:

Considere a projeção de $x(t)$ na base formada pelas funções *sampling*

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \varphi_k(t) \quad ; \quad \varphi_k(t) = \text{Sa}\left(\frac{\omega_0}{2}(t - kT)\right) \quad , \quad \text{com} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Interpolação II

Como as funções $\varphi_k(t)$ são ortogonais, os coeficientes α_k são dados por

$$\alpha_k = \frac{\langle x(t)\varphi_k(t) \rangle}{\langle \varphi_k^2(t) \rangle} = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\varphi_k(t)dt$$

$$\alpha_k = \frac{1}{T} \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \mathcal{F}\{\varphi_k(t)\} \Big|_{\omega=0} = \frac{1}{T} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\beta) T G_{\omega_0}(-\beta) \exp(j\beta kT) d\beta$$

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0/2}^{+\omega_0/2} X(\omega) \exp(j\omega kT) d\omega$$

Note que se $X(\omega) = 0$ para $|\omega| > 2\pi B$ (limitado em frequência) e, supondo-se que o intervalo de amostras é tal que

$$2\pi B < \frac{\omega_0}{2} = \frac{\pi}{T} \Rightarrow T < \frac{1}{2B}$$

os limites de integração podem ser estendidos para $-\infty$ e $+\infty$

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \exp(j\omega kT) d\omega = x(kT)$$

Interpolação III

e, portanto,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) \text{Sa}\left(\frac{\omega_0}{2}(t - kT)\right)$$

Observe que $\alpha_k = x(kT)$, ou seja, os coeficientes da expansão em série são os valores das amostras de $x(t)$ nos instantes kT , desde que $x(t)$ tenha transformada limitada em frequência.

Exemplo I

Exemplo 1.1

Considere o sinal $x(t) = 1$, limitado em frequência para qualquer $B > 0$.

Se o intervalo de amostragem for $T = 1$, ou seja, $\omega_0 = 2\pi$, as funções $\text{Sa}(\pi t - k)$ formam uma base para qualquer sinal de faixa $B < 0.5$.

A Figura 2 mostra a aproximação de $x(t)$ por um número limitado de amostras, isto é, uma e três amostras, e a Figura 3 para cinco e sete amostras. Note que o intervalo de validade da aproximação aumenta (e que o erro dentro desse intervalo diminui) com o número de amostras.

Exemplo II

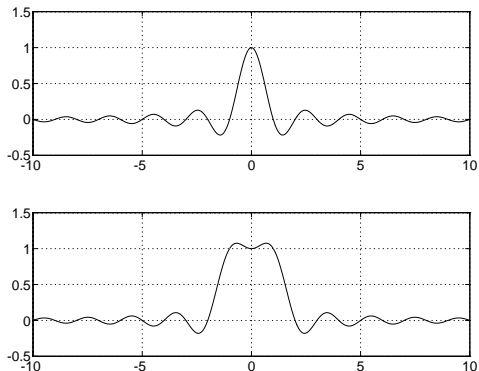


Figura: Sinal $x(t) = 1$ aproximado por um (acima) e três (abaixo) termos de $\text{Sa}(\pi(t - kT))$.

Exemplo III

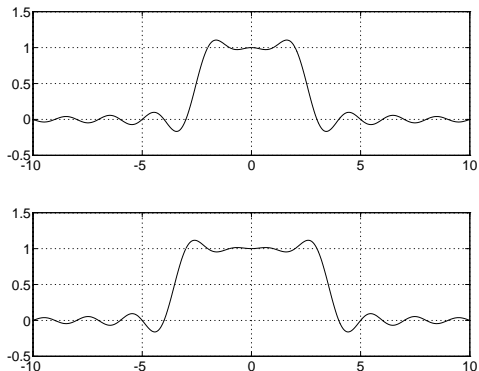


Figura: Sinal $x(t) = 1$ aproximado por cinco (acima) e sete (abaixo) termos de $\text{Sa}(\pi(t - kT))$.

Exemplo I

Exemplo 1.2

Considere o sinal

$$x(t) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

com frequência $\omega_{max} = 2\pi B = 0.5\pi$ e portanto $B = 0.25$. Amostrando o sinal com intervalo de amostragem $T = 1$, tem-se as amostras

$$\text{sen}\left(k\frac{\pi}{2}\right) \quad , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

A Figura 4 mostra a aproximação de $x(t)$ por duas e quatro amostras e a Figura 5 mostra o sinal e a aproximação com seis termos.

Exemplo II

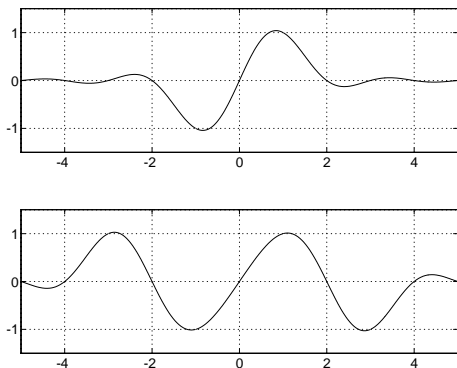


Figura: Sinal $\sin(0.5\pi t)$ aproximado por duas (acima) e quatro (abaixo) amostras.

Exemplo III

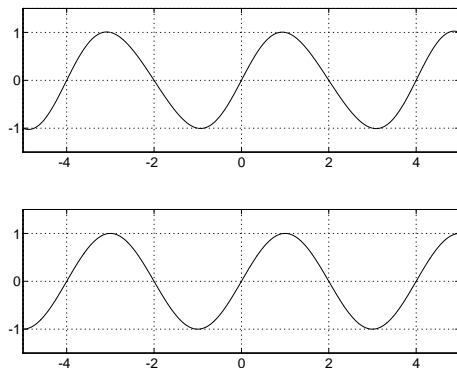


Figura: Sinal $\sin(0.5\pi t)$ (abaixo) e sua aproximação por seis amostras (acima).

Amostragem por impulsos

Teorema 3 (Amostragem (por impulsos))

Considere um sinal $x(t)$ limitado em frequência, isto é

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega) \quad , \quad X(\omega) = 0 \quad , \quad |\omega| > 2\pi B \quad \text{e} \quad 0 < T < \frac{1}{2B}$$

Então, $x(t)$ pode ser recuperado a partir do sinal $x_a(t)$ dado por

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)\delta(t - kT)$$

por meio de um filtro linear passa-baixas ideal de faixa ω_0 dado por

$$H(j\omega) = TG_{\omega_0}(\omega)$$

Amostragem por impulsos I

Prova:

O sinal $x_a(t)$ pode ser escrito como

$$x_a(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

chamado de amostragem ideal, resultando em $X_a(\omega)$ dado por

$$\begin{aligned} X_a(\omega) &= \mathcal{F}\{x_a(t)\} = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)\right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_0) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\omega - k\omega_0) \end{aligned}$$

A função $X_a(\omega)$ é mostrada na Figura 6 para $\omega_0/2 > 2\pi B$ (acima) e para $\omega_0/2 < 2\pi B$ (abaixo). Note que se $\omega_0/2$ for menor do que a máxima frequência angular $2\pi B$ da transformada de Fourier do sinal $x(t)$, há superposição (*aliasing*) dos espectros em $X_a(\omega)$.

Amostragem por impulsos II

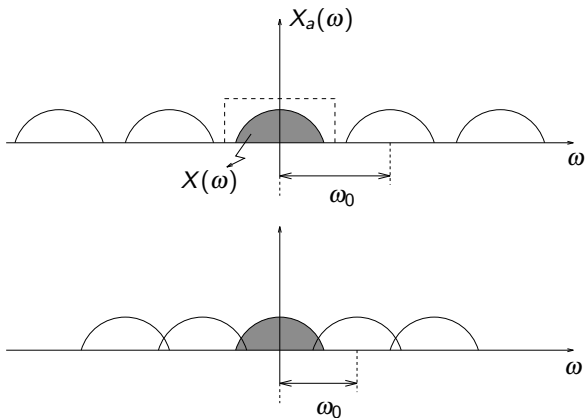


Figura: Função $X_a(\omega)$ para $\omega_0/2 > 2\pi B$ (acima) e para $\omega_0/2 < 2\pi B$ (abaixo).

Amostragem por impulsos III

Para $X(\omega)$ limitado em frequência e ω_0 adequado ($\omega_0/2 > 2\pi B$), o sinal $x(t)$ pode ser recuperado pela filtragem de $X_a(\omega)$, isto é, multiplicando a expressão de $X_a(\omega)$ de ambos os lados por $TG_{\omega_0}(\omega)$, tem-se

$$X(\omega) = X_a(\omega)TG_{\omega_0}(\omega)$$

A correspondente expressão temporal é dada por

$$x(t) = x_a(t) * \mathcal{F}^{-1}\{TG_{\omega_0}(\omega)\} = \left\{x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)\right\} * \text{Sa}\left(\frac{\omega_0}{2}t\right)$$

resultando em

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)\text{Sa}\left(\frac{\omega_0}{2}(t - kT)\right)$$

Amostragem por impulsos IV

Observe que, calculando $x(t)$ nos pontos $t = mT$, $m \in \mathbb{Z}$, tem-se

$$x(mT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) \text{Sa}\left(\frac{\omega_0}{2}(m-k)T\right) ; \quad \text{Sa}\left(\frac{\omega_0}{2}(m-k)T\right) = \begin{cases} 0 & , \quad m \neq k \\ 1 & , \quad m = k \end{cases}$$

e portanto a contribuição das demais amostras no instante $t = mT$ é sempre nula, pois trata-se de uma interpolação.

Exemplo – Interpolação Linear I

Exemplo 1.3 (Interpolação Linear)

Considere um conjunto de pontos $x(kT)$ e a função *sampling* aproximada

$$\text{Saa}\left(\frac{\omega_0}{2}t\right) = \text{Tri}_{2T}(t) \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

mostrada na Figura 7, junto com a função *sampling*, para $T = 1$.

Exemplo – Interpolação Linear II

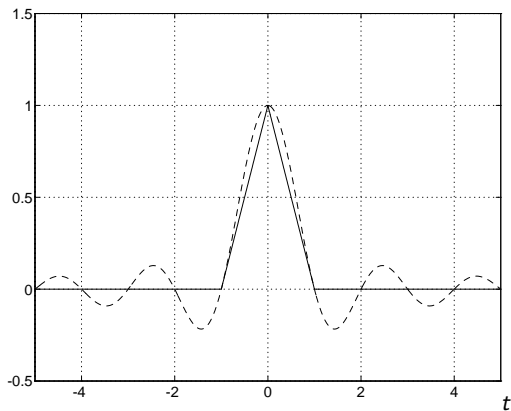


Figura: $\text{Sa}(\pi t)$ (tracejada) e $\text{Tri}_2(t)$ (contínua).

Exemplo – Interpolação Linear III

A interpolação

$$x_{\text{Tri}}(t) = \sum_k x(kT) \text{Saa}\left(\frac{\omega_0}{2}(t - kT)\right)$$

resulta na soma de segmentos de retas e requer um cálculo bem mais simples do que a interpolação baseada no Teorema da amostragem, dada por

$$x_{\text{Sa}}(t) = \sum_k x(kT) \text{Sa}\left(\frac{\omega_0}{2}(t - kT)\right)$$

Observe que $x_{\text{Tri}}(t)$ corresponde à união dos pontos $x(kT)$ por segmentos de reta (interpolação linear). A Figura 8 mostra a interpolação linear e a Figura 9 mostra a interpolação construída com funções *sampling* a partir das amostras com $T = 0.25$ da função

$$x(t) = \text{sen}(t) + \text{sen}(\pi t) + \text{sen}(2\pi t)$$

cuja máxima frequência é $B = 1$ Hz e, portanto, satisfazendo a condição do teorema da amostragem $T < (2B)^{-1}$. Na Figura 9, as maiores discrepâncias ocorrem nas bordas, devido à não utilização de amostras fora do intervalo mostrado.

Exemplo – Interpolação Linear IV

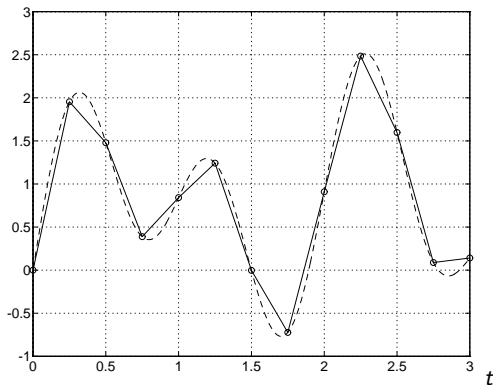


Figura: $\sin(t) + \sin(\pi t) + \sin(2\pi t)$ (tracejada) e interpolação linear (contínua).

Exemplo – Interpolação Linear V

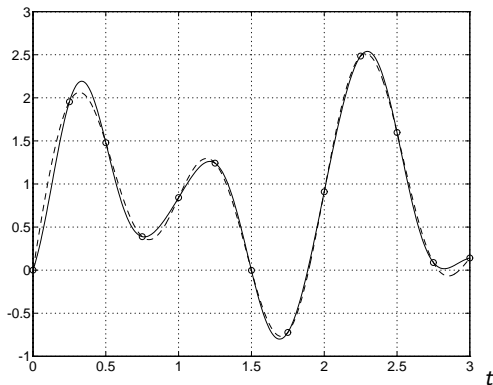


Figura: $\text{sen}(t) + \text{sen}(\pi t) + \text{sen}(2\pi t)$ (tracejada) e interpolação com a função *sampling* (contínua).

Amostragem por impulsos aproximados I

Teorema 4 (Amostragem (por impulsos aproximados))

Considere um sinal $x(t)$ limitado em frequência, isto é

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega) \quad , \quad X(\omega) = 0 \quad , \quad |\omega| > 2\pi B \quad \text{e} \quad 0 < T < \frac{1}{2B}$$

Então, $x_a(t)$ pode ser recuperado a partir do sinal $x_a(t)$ dado por

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{1}{\Delta} G_{\Delta}(t - kT) \quad ; \quad 0 < \Delta < T$$

por meio de um filtro linear passa-baixas ideal de faixa ω_0 dado por

$$H(j\omega) = TG_{\omega_0}(\omega)$$

Prova: Note que $x_a(t)$ é construído com $x(t)$ variando no intervalo $0 < \Delta < T$, e não fixo em $x(kT)$ como no caso da amostragem ideal. O sinal $x_a(t)$ pode ser escrito como

Amostragem por impulsos aproximados II

$$x_a(t) = x(t) \sum_k \frac{1}{\Delta} G_{\Delta}(t) * \delta(t - kT)$$

resultando em

$$X_a(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \mathcal{F} \left\{ \sum_k \frac{1}{\Delta} G_{\Delta}(t) * \delta(t - kT) \right\}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left\{ \sum_k \frac{1}{\Delta} G_{\Delta}(t) * \delta(t - kT) \right\} &= \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{\Delta} G_{\Delta}(t) * \sum_k \delta(t - kT) \right\} = \\ &= \text{Sa} \left(\frac{\Delta}{2} \omega \right) \omega_0 \sum_k \delta(\omega - k\omega_0) = \omega_0 \sum_k \text{Sa} \left(\frac{\Delta}{2} k\omega_0 \right) \delta(\omega - k\omega_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_a(\omega) &= \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \omega_0 \sum_k \text{Sa} \left(\frac{\Delta}{2} k\omega_0 \right) \delta(\omega - k\omega_0) = \\ &= \frac{1}{T} X(\omega) + \frac{1}{T} \sum_{k \neq 0} \text{Sa} \left(\frac{\Delta}{2} k\omega_0 \right) X(\omega - k\omega_0) \end{aligned}$$

e portanto $X(\omega) = T G_{\omega_0}(\omega) X_a(\omega)$.

Amostragem por pulsos I

Propriedade 2 (Amostragem (por pulsos))

Considere um sinal $x(t)$ limitado em frequência, isto é

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega) \quad , \quad X(\omega) = 0 \quad , \quad |\omega| > 2\pi B \quad \text{e} \quad 0 < T < \frac{1}{2B}$$

Então, $x(t)$ pode ser recuperado a partir do sinal $x_p(t)$ dado por

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)p(t-kT)$$

sendo $p(t)$ um pulso com transformada de Fourier $P(\omega)$, por meio de um filtro linear passa-baixas de faixa ω_0 dado por

$$H(j\omega) = \frac{TG_{\omega_0}(\omega)}{P(\omega)}$$

Amostragem por pulsos II

Prova:

O sinal $x_p(t)$ pode ser escrito como

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)p(t) * \delta(t - kT) = p(t) * x_a(t)$$

com

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)\delta(t - kT)$$

resultando em

$$X_p(\omega) = P(\omega)X_a(\omega) \quad , \quad X_a(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\omega - k\omega_0)$$

Portanto,

$$X(\omega) = \frac{TG_{\omega_0}(\omega)}{P(\omega)} X_p(\omega)$$